

# 分数傅里叶变换的快速算法及计算全息图的研究

史东, 曹玉茹, 张子云, 韦穗

(安徽大学 计算智能与信号处理重点实验室, 安徽 合肥 230039)

**摘要:**通过分析菲涅耳衍射积分的快速算法,依据 Lohmann 提出的任意阶的分数傅里叶变换的单透镜光学实验装置,详细分析了光场在此单透镜系统中的传播过程,提出了一种基于傅里叶变换的分数傅里叶变换快速算法,并对基于此快速算法的分数傅里叶变换全息图的计算机生成与数字重现进行了研究。实验结果示出了分数傅里叶变换全息图及其在重构过程中分数阶匹配与否的实验结果,验证了分数傅里叶变换分数阶的重要性质和笔者提出算法的可行性。

**关键词:**菲涅耳衍射; 分数傅里叶变换; 分数傅里叶变换全息图

中图分类号: TP301.6

文献标识码: A

文章编号: 1005-3751(2006)04-0014-03

## Research on Fast Algorithm and Compute-Generated Hologram of Fractional Fourier Transform

SHI Dong, CAO Yu-ru, ZHANG Zi-yun, WEI Sui

(Key Lab. of Intelligent Computing and Signal Processing, Anhui University, Hefei 230039, China)

**Abstract:** Proposes a fast simulated algorithm of fractional Fourier transform based on FFT by analysing the fast algorithm of Fresnel diffraction and analyzing the physical process of optical field transmitting through single-lens system by Lohmann. Also realise the computer simulation holographic generation and reconstruction. The experiment shows that the results of the fractional Fourier transform holography and reconstructed image with and without the matched fractional order, supports the availability of the fast algorithm we propose.

**Key words:** Fresnel diffraction; fractional Fourier transform; fractional Fourier transform hologram

### 0 引言

分数傅里叶变换由 Namias<sup>[1]</sup>在 1980 年引入量子力学领域。20 世纪 90 年代 Mendlovic 和 Ozaktas 把分数傅里叶变换引入光学领域,并分析了分数傅里叶的一些基本性质。随后 Lohmann<sup>[2]</sup>采用 Wigner 分布函数重新定义了光学分数傅里叶变换,并给出了任意阶的分数傅里叶变换的单透镜光学实验装置。P. P. Finet<sup>[3]</sup>最先把菲涅耳衍射与分数傅里叶变换联系起来。随后人们发现<sup>[4,5]</sup>:分数傅里叶变换对分数阶变化的连续性对应着光的传播由原始光场经过菲涅耳衍射区一直到无穷远处夫琅和费衍射区的全过程。

分数傅里叶变换全息图<sup>[4,6]</sup>是一种新型全息图,是在分数傅里叶变换域上用全息的方法记录下的物光波的分数傅里叶变换分布。文中针对光波衍射实际情况提出一种分数傅里叶变换快速算法,并用计算机模拟分数傅里叶变换全息图的生成和再现,得到了比较满意的结果。

收稿日期: 2005-10-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60473102)

作者简介: 史东(1982-),男,安徽淮北人,硕士研究生,研究方向为计算机视觉与三维全息显示; 韦穗,教授,博导,研究方向为计算机视觉与三维全息显示。

### 1 分数傅里叶变换及其快速算法实现

以一维为例,简单介绍菲涅耳近场衍射的角谱算法<sup>[7]</sup>。设物体在单位振幅均匀平面波照射后,光场分布为  $f(x_0)$ ,则传播距离为  $z$  处的衍射光场的菲涅耳衍射积分表示为:

$$g(x) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0) \times \exp(j\pi/\lambda z * (x - x_0)^2) dx_0 \quad (1)$$

可以把上面积分表示为入射光场与系统函数卷积的形式,利用卷积定理可得:

$$g(x) = \text{IFFT}[\text{FFT}(f(x) \times \exp(-j\pi\lambda z u^2))] \quad (2)$$

其中省略了相位因子,将空间频率坐标  $u$  转换为衍射平面的空间坐标:  $\tilde{x} = \lambda z u$ ,并将式(1)离散化为:

$$g(m') = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \times \sum_{\tilde{m}=-N/2}^{N/2-1} \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} f(m) \times \exp(-j2\pi \frac{m\tilde{m}}{N}) \times \exp(-j\pi \frac{\tilde{m}^2}{N}) \times \exp(j2\pi \frac{\tilde{m}m'}{N}) \quad (3)$$

上式中,  $k = 2\pi/\lambda$  为波数,  $N$  为输入输出面的采样点数,  $m, \tilde{m}, m'$  分别为输入面、傅里叶变换面和非涅耳衍射平面的离散序号。这些结果可以直接推广到二维信号中。

下面开始讨论分数傅里叶变换<sup>[3,5]</sup>及其快速算法。以一维信号为例给出分数傅里叶变换定义。设  $f(x)$  为输入

信号,则其  $p$  阶分数傅里叶变换定义为:

$$f_p(x_p) = C_p \times \exp(j\pi \frac{x_p^2}{\tan\phi}) \times \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \times \exp(-j\pi \frac{x^2}{\tan\phi}) \times \exp(-j2\pi \frac{xx_p}{\sin\phi}) dx \quad (4)$$

其中:

$$C_p = \frac{\exp\{-j[\pi \operatorname{sgn}(\sin\phi)/4 - \phi/2]\}}{\sqrt{|\sin\phi|}}$$

$p(0 < |p| < 2)$  为分数阶,  $\phi = p \times \frac{\pi}{2}$

分数傅里叶变换具有以下两条重要性质:

- (1) 可加性:  $f_{p_1}(f_{p_2}) = f_{p_1+p_2}$ ;
- (2) 周期性:  $f_{p+4n} = f_p$ , 其中  $n$  为整数。

对应于这种纯数学的描述, Lohmann 提出了任意阶分数傅里叶变换光学实现的透镜模式, 把分数傅里叶变换理解为透镜的位相转换与非涅耳衍射的结合。文中采用 Lohmann 一型结构, 结构如图 1 所示, 图中透镜为薄透镜。

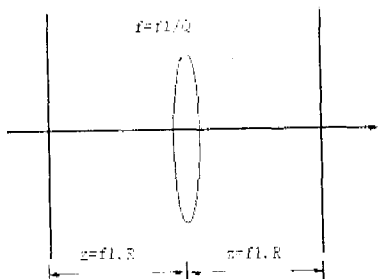


图 1 Lohmann 一型分数傅里叶变换实现光路

当透镜的焦距  $f$  和距离  $z$  满足下面的条件:  $f = f_1/\sin(\phi)$ ,  $z = f_1 \times \tan(\phi/2)$ , 图 1 的装置将完成  $p$  阶分数傅里叶变换, 图中  $\phi = p \times \pi/2$ ,  $Q = \sin(\phi)$ ,  $R = \tan(\phi/2)$ ,  $f_1$  为变换系统的标准焦距。

对于图 1 所示装置, 对光场沿系统主轴在系统中的传输过程进行分析。假设左平面为物面, 则右平面即为分数傅里叶变换域面。物光从物面传到透镜的过程是非涅耳衍射过程, 可以表示为:

$$f_1(x_1) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \times \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \times \exp(j\pi \frac{(x-x_1)^2}{\lambda z}) dx \quad (5)$$

式中,  $f_1(x_1)$  为透镜前表面光场分布。透镜后表面光场分布为  $f_2(x_1)$  经过透镜位相变换所得, 可以表示为:

$$f_2(x_1) = f_1(x_1) \times \exp(-j\pi \frac{(x_1)^2}{\lambda f}) \quad (6)$$

式中,  $f_2(x_1)$  即透镜后表面光场分布。光场从透镜后表面传播到分数傅里叶变换域面的过程又是一个非涅耳衍射过程, 可以表示为:

$$f_p(x_p) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \times \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x_1) \times \exp(j\pi \frac{(x_p-x_1)^2}{\lambda z}) dx_1 \quad (7)$$

整个过程可将式(5)、(6)、(7) 合并, 得下式:

$$f_p(x_p) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \{ \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \times \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \times$$

$$\exp(j\pi \frac{(x-x_1)^2}{\lambda z}) dx \} \times \exp(-j\pi \frac{(x_1)^2}{\lambda f}) \times \exp(j\pi \frac{(x_p-x_1)^2}{\lambda z}) dx_1 \quad (8)$$

运用上述菲涅耳快速算法对整个表达式作离散化处理, 可得到分数傅里叶变换快速算法, 此算法可以直接扩展到二维可分离变量的情况。

## 2 分数傅里叶变换全息图的记录与重现

### 2.1 分数傅里叶变换全息图的记录和重现过程

分数傅里叶变换全息图是平面参考光波照射在物光波任意阶分数傅里叶频谱上相干叠加的结果。图 2 是 Lohmann 系统装置在全息面记录了分数傅里叶变换全息图。

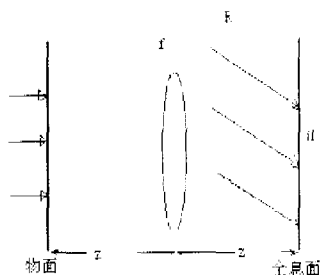


图 2 分数傅里叶变换全息图记录

在系统的  $p_1$  阶分数傅里叶变换域上, 引入参考光和物体的分数傅里叶变换光场干涉, 得到物体的  $p_1$  阶分数傅里叶变换全息图, 其中  $f(x, y)$  为物函数,  $f_p(x_p, y_p) = F_{p_1}[f(x, y)]$  是对应的  $p_1$  阶分数傅里叶变换,  $R$  为记录时所用的平行参考光, 则全息图上记录的光强分布为<sup>[4,6]</sup>:

$$I(x_p, y_p) = |f_p(x_p, y_p) + R|^2 = |f_p(x_p, y_p)|^2 + |R|^2 + f_p^*(x_p, y_p) \times R + R^* \times f_p(x_p, y_p) \quad (9)$$

上式前两项分别表示原始物光波和参考光波在分数傅里叶变换域上的功率谱, 重现时产生零级衍射像, 是最重要的干扰项。为了消除零级像的干扰, 文献<sup>[8]</sup> 中根据零级像的特点提出对分数傅里叶变换全息图进行拉普拉斯变换, 基本消除零级衍射像, 而对其它两项影响却很小:

$$I'(x_p, y_p) \approx f_p^*(x_p, y_p) \times R + R^* \times f_p(x_p, y_p) \quad (10)$$

图 3 所示系统为分数傅里叶变换重现装置。将经过变换的全息图置于全息输入面, 并用原参考光照射, 得到全息面后光场为:

$$I'(x_p, y_p) \times R \approx f_p^*(x_p, y_p) \times R^2 + |R|^2 \times f_p(x_p, y_p) \quad (11)$$

因为分数傅里叶变换全息图引入分数阶这一自由度, 它不仅能记录物体的信息, 同时还能记录系统的信息, 这就要求再现系统能完成与记录系统相匹配的分数阶傅里叶变换, 否则无法得到重现物体的波前。再现光路系统实现  $-p_1$  阶分数傅里叶变换, 根据分数傅里叶变换的可加

性可知能够在再现物面上得到原物光波前。由于分数傅里叶变换周期性质,重现系统实现  $4 - p_1$  阶分数傅里叶变换也可以重现物光波前。还有其它可能选择,这里不予讨论。

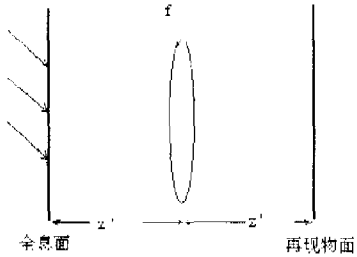


图 3 分数傅里叶全息图再现光路

2.2 分数傅里叶变换全息图的记录和重现的计算机模拟  
记录物体为二值化后的数字图像,参考光波的方向角  $\theta = \pi/6$ ,记录系统的入射波长  $\lambda = 630\text{nm}$ ,透镜焦距为  $f = 150\text{mm}$ 。在 Matlab 平台下,将前述快速算法直接推广到二维情况,模拟记录和重现过程,得到如下结果(见图 4)。

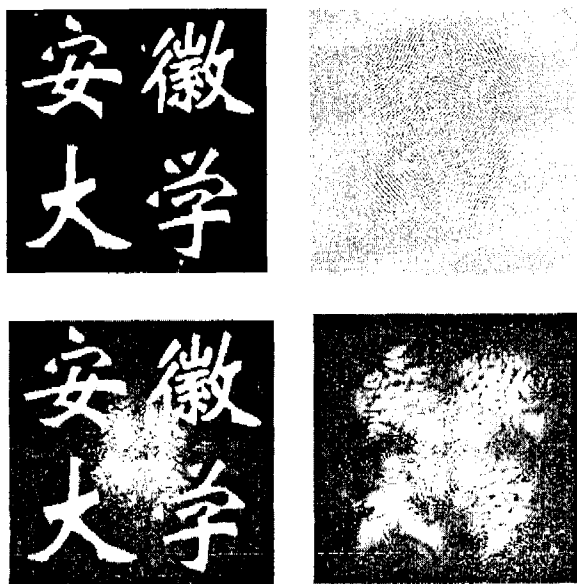


图 4 分数傅里叶变换全息图的生成和重现结果

图中:左上图是原物图像;右上图是原物图像在  $p_1 = 0.6$  阶分数傅里叶变换域生成的全息图;左下图是对右上

图所示全息图进行  $p = 4 - p_1 = 3.4$  阶分数傅里叶变换所得到的重现图像;右下图对右上图所示全息图进行  $p = 3.9$  阶分数傅里叶变换所得到的结果。

由图可见,由于记录和重现时的分数阶不匹配,得不到原物的重现图像;重现的结果图像中含有一些背景噪声,这是由于对式(11)作匹配分数傅里叶变换时,(11)式中有共轭项存在。

### 3 总结

分析 Lohmann 单透镜模型的物理过程,利用菲涅耳衍射的快速算法,提出了基于 Lohmann 单透镜模型的分数傅里叶变换快速算法,物理概念十分明确;利用此快速算法实现了分数傅里叶变换全息图的计算机模拟和重现。分数傅里叶变换是一种较新的信息处理方法,由于它既区别于一般的菲涅耳全息图,又有别于一般的傅里叶变换全息图,可以预料,它必将有广阔的应用前景。

### 参考文献:

- [1] Namis V. The Fractional order Fourier transform and its application in quantum mechanics[J]. J Inst Maths Appl, 1980, 25 (12):241 - 265.
- [2] Lohmann A W. Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform[J]. J Opt Soc Am, 1993, 10 (12): 2181 - 2186.
- [3] Finet P P. Fresnel diffraction and the fractional - order Fourier transform[J]. J Opt Lett, 1994, 19(18): 1388 - 1390.
- [4] 陈家璧,苏显渝. 光信息技术原理及应用[M]. 北京:高等教育出版社,2001.
- [5] 杨 虎,张艺芳. 分数傅里叶变换与菲涅耳衍射的等效性[J]. 光电子激光,2001, 12(1): 93 - 96.
- [6] 谢世伟,高 峰,曾阳素,等. 分数傅里叶变换计算全息图[J]. 中国激光,2003, 30(5): 431 - 434.
- [7] 丁大为. 菲涅耳全息图的计算机生成和数字重现[D]. 合肥:安徽大学教育部重点实验室,2004.
- [8] 刘 诚. 无直透光和共轭像的数字全息[J]. 光学学报, 2002, 22(4): 427 - 431.

(上接第 13 页)

- [6] Satyanarayana A. A Unified Formula for Analysis of Some Network Reliability Problems[J]. IEEE Trans Reliability, 1982, 31: 23 - 32.
- [7] Satyanarayana A. New Topological Formula and Rapid Algorithms for Reliability Analysis of Complex Networks [J]. IEEE Trans Reliability, 1978, 27: 82 - 100.
- [8] Satyanarayana A, Chang M K. Network Reliability and the Factoring Theorem[J]. Network, 1983, 13: 107 - 120.
- [9] 郭 波,武小悦. 系统可靠性分析[M]. 长沙:国防科技大学出版社, 2002.

- [10] 罗鹏程,金 光,周经伦,等. 通信网可靠性研究综述[J]. 小型微型计算机系统, 2000, 21(10): 1073 - 1077.
- [11] 美国 FCC 网络可靠性委员会(NRC)报告. Network Reliability Performance Committee Compendium of Technical Papers: Section A, B, C, D[Z]. 1999.
- [12] 张学渊. 通信网可靠性及其在中国的研究[D]. 北京:北京邮电大学, 1997.
- [13] 美国 TPC 可靠性与脆弱性研究小组. Nation Information Infrastructure Risk Assessment: A Nation Information at risk [Z]. 1999.