

# 非高斯噪声下 Kalman 滤波熵理论算法研究

赵 凯, 王爱平, 吴 刚

(安徽大学 计算与信号处理教育部重点实验室, 安徽 合肥 230039)

**摘 要:** 从一个新的角度结合具体的算法讲述了 Kalman 滤波器的原理, 并对噪声为非高斯情况下结合熵的理论提出了假设, 解决了噪声为非高斯情形下的滤波器设计的瓶颈。传统的 Kalman 滤波器是在噪声为高斯的情形下得出的最优滤波估计, 但是现实生活中大多数噪声却是未知的、不确定性并且非高斯的。为了清楚说明熵原理应用于非高斯滤波器的设计结果, 运用了数学统计的方法, 对比滤波效果, 说明了其可行性, 证明了这种方法更适应于对噪声情况未知、参数不明确的情况, 为研究广义噪声的随机系统提出了一种新的通用的解决途径。

**关键词:** Kalman 滤波器; 滤波; 熵; 概率密度

中图分类号: TP301.6

文献标识码: A

文章编号: 1673-629X(2008)06-0040-03

## Kalman Filter Algorithm under Non - Gaussian Noises Using Entropy Theory

ZHAO Kai, WANG Ai-ping, WU Gang

(Ministry of Education Key Lab. of Intelligent Computing & Signal Processing,  
Anhui University, Hefei 230039, China)

**Abstract:** Describes the principle of the Kalman filter from a new perspective, where a specified algorithm has been developed on the assumption that the entropy theory could be used for the design of the Kalman filter under non - Gaussian noises. Traditional Kalman filter has got the optimal filter estimate under Gaussian noises without thinking that there are always some unknown, uncertain even non - Gaussian noises in reality. In order to clarify the experiment result using the entropy theory for non - Gaussian filter design, the mathematical statistics are applied in the paper so as to illustrate the filtering effects for the explanation of its feasibility. It has also been shown that the proposed filtering even fits for unknown possibility or ambiguity parameter of noises in Kalman filter design. Also provides a new and universal way for studying the generalized noises of stochastic systems.

**Key words:** Kalman filter; noises; entropy; probability

### 0 引 言

Kalman 滤波是状态空间估计的最核心方法, 此方法的原理和功能是: Kalman 滤波是针对随机过程状态进行估计的, 首先进行模式状态的预报, 接着引入观测数据, 然后根据观测数据对模式状态进行重新分析(即更新)。随着模式状态预报的持续进行和新的观测数据的陆续输入, 这个过程可以不断向前推进。Kalman 滤波在信号处理、最优控制、航天等领域都得到了广泛的应用, 如在导弹发射、运行的整个过程中, 地面控制中心必须对导弹进行跟踪和控制, 但由于风、云、雨等

多种大气因素的影响, 导弹当前位置会偏离预先计算好的轨迹, 此时必须根据对导弹位置的最新观测数据对导弹的运行方向进行调整, 同时由于观测存在误差, 又必须通过不断地观测校准计算模型中的参数, 使模型更准确, 这项工作的核心就是使用 Kalman 滤波<sup>[1-3]</sup>。经典的 Kalman 滤波多是在高斯情况下进行的推导, 然而现实生活中确实存在大量的非高斯的噪声。针对这种情况, 应用熵的原理可得出一些有意义的结果, 并可应用于非高斯线性系统的滤波器设计之中。

### 1 Kalman 滤波器在高斯噪声条件下的滤波方法

先要引入一个离散控制过程的系统。该系统可用一个线性随机微分方程 (Linear Stochastic Differential Equation) 来描述:

收稿日期: 2007-09-25

基金项目: 国家自然科学基金项目(60472065)

作者简介: 赵 凯(1981-), 男, 安徽淮北人, 硕士研究生, 研究方向为智能计算; 王爱平, 硕士, 教授, 研究方向为基于残差分布的波形研究。

线性离散时变随机控制系统

$$x(t+1) = A(t)x(t) + w(t) \quad (1)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + v(t) \quad (2)$$

其中状态  $A(t), C(t)$  是已知时变的适当维数矩阵。

上面两式子中,  $x(k+1)$  是  $k+1$  时刻的系统状态。 $A$  和  $B$  是系统参数, 对于多模型系统, 它们为矩阵。 $y(k)$  是  $k$  时刻的测量值,  $C(k)$  是测量系统的参数, 对于多测量系统,  $C$  为矩阵。 $w(k)$  和  $v(k)$  分别表示过程和测量的噪声。 $w(k), v(k)$  互相独立, 它们被假设成高斯白噪声 (White Gaussian Noise), 0 均值,  $Ew(t) = 0, Ev(t) = 0$ , 正太分布在此假设情况下, 以下条件成立:

$$1) Ew(t) = 0, Ev(t) = 0, E[w(t)v^T(j)] = 0,$$

$\forall t, j$

$$E[w(t)w^T(j)] = Q(t)\delta_{ij}$$

$$E[v(t)v^T(j)] = R(t)\delta_{ij}$$

其中  $E$  为均值号,  $T$  为转置号,  $\delta_{ij} = 0 (i \neq j), \delta_{ij} = 1 (i = j)$

2)  $x(0)$  不相关与  $w(t)$  和  $v(t), Ex(0) = \mu_0, E[(x(0) - \mu_0)(x(0) - \mu_0)^T] = P_0$

3)  $A(t), \Gamma(t), C(t), Q(t), R(t)$  是已知的时变矩阵。

滤波器的设计目的是利用输入输出信息  $\xi_k = \{x_i, y_i\}, (i = 0, 1, \dots, k)$ , 系统(1)和(2)及  $w(t)$  的随机性能来有效地估计系统的状态  $x(k+1)$ , 使如下性能指标极小化:

$$J = E[(x(j) - \hat{x}(j|t))^T(x(j) - \hat{x}(j|t))] \quad (3)$$

定义 1<sup>[4]</sup>: 由  $m \times 1$  维随机变量  $y \in R^m$  的线性函数估计  $n \times 1$  维随机变量  $x \in R^n$ , 记估计值为  $\hat{x} = b + Ay, b \in R^n, A \in R^{n \times m}$ , 若估计值极小化性能指标  $J = E[(x - \hat{x})^T(x - \hat{x})]$ , 则称  $\hat{x}$  为随机变量的线性最小方差估计, 其中  $E$  为均值号,  $T$  为转置号。

定理 1: 由随机变量  $y \in R^m$  对随机变量  $x \in R^n$  的线性最小方差估计公式为:  $\hat{x} = Ex + P_{xx}P_{xy}^{-1}(y - Ey)$ , 其中假设  $Ex, Ey, P_{xx}, P_{xy}$  均存在, 并且定义方差阵和协方差阵符号<sup>[4]</sup>:

$$P_{xx} = E[(x - Ex)(x - Ex)^T]$$

$$P_{xy} = E[(x - Ex)(y - Ey)^T]$$

定义 2: 设  $y(1), y(2), \dots, y(k) \dots \in R^m$  是存在二阶矩的随机序列, 它的新息序列定义为:

$$\epsilon(k) = y(k) - \text{proj}(y(k) | y(1), \dots, y(k-1)), k = 1, 2, \dots$$

并定义  $y(k)$  的一步最优预报估计为:

$$\hat{y}(k | k-1) = \text{proj}(y(k) | y(1), \dots, y(k-1))$$

因此信息列可定义为<sup>[2]</sup>:

$$\epsilon(k) = y(k) - \hat{y}(k | k-1), k = 1, 2, \dots \text{其中规定 } \hat{y}(1 | 0) = Ey(1), \text{这保证 } E\epsilon(1) = 0.$$

定理 2: 设随机变量  $x \in R^n$ , 随机序列  $y(1), \dots, y(k), \dots \in R^m$ , 且它们存在二阶矩, 则有递推公式  $\text{proj}(x | y(1), \dots, y(k)) = \text{proj}(x | y(1), \dots, y(k-1)) + E[(x\epsilon^T(k))E[(\epsilon(k)\epsilon(k)^T)]^{-1}\epsilon(k)]$ <sup>[4]</sup> 具备以上基本假设和定理, 对系统(1)的两个方程同时取射影得到它的最优递推 Kalman 滤波器<sup>[4,5]</sup>:

$$\hat{x}(t+1 | t+1) = \hat{x}(t+1 | t) + K(t+1)\epsilon(t+1) \quad (4)$$

$$\hat{x}(t+1 | t) = A(t)\hat{x}(t | t) \quad (5)$$

$$\epsilon(t+1) = y(t+1) - C(t)\hat{x}(t+1 | t) \quad (6)$$

$$K(t+1) = P(t+1 | t)C^T(t+1)[C(t+1)P(t+1 | t)C^T(t+1) + R(t+1)]^{-1} \quad (7)$$

$$P(t+1 | t) = A(t)P(t | t)A^T(t) + Q(t) \quad (8)$$

$$P(t+1 | t+1) = [I_n - K(t+1)C(t+1)]P(t+1 | t) \quad (9)$$

其中:  $\hat{x}(0 | 0) = \mu_0, P(0 | 0) = P_0$ 。

实际应用过程中当矩阵的维数较大时, 求增益矩阵往往需要较大的工作量。其简化的计算增益的方法有很多种<sup>[6]</sup>, 在这里采用离线计算增益  $K$  的方法。从以上模型可以看出卡尔曼滤波器增益系数  $K$ 、误差协方差矩阵  $P$  与测量数据无关, 可以离线计算, 从而可以减少计算量。

假定如下系统

$$X(t) = X(t-1) + w(n-1)$$

$$Y(t) = 0.6 * X(t) + v(n)$$

高斯下滤波算法实验及结果:

算法核心 C++ 代码如下:

```
w = gauss(0, Q, N_gauss); //产生激励源: w(n)
```

```
v = gauss(1, R, N_gauss); //产生加性噪声: v(n)
```

```
for(n=1; n<N_gauss; n++) //状态方程
```

```
    X1[n] = X1[n-1] + w[n-1];
```

```
for(n=0; n<N_gauss; n++) //观测方程
```

```
    Y[n] = 0.6 * X1[n] + v[n];
```

```
X0[0] = 0;
```

```
p[0] = 10;
```

```
for(n=1; n<N_gauss; n++)
```

```
{
```

```
    k[n] = (p[n-1] + Q) / (0.6 * (p[n-1] + Q) + R);
```

```
    p[n] = (1 - 0.6 * k[n]) * (p[n-1] + Q);
```

```
}
```

```
for(n=1; n<N_gauss; n++)
```

$$X0[n] = X0[n-1] + k[n] * (Y[n] - 0.6 * X0[n-1]);$$

运行结果如图 1 所示。

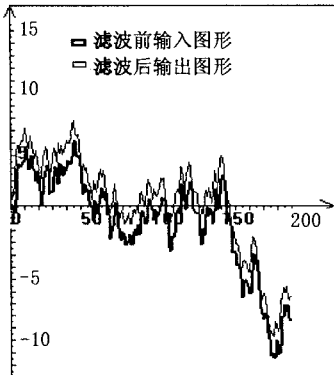


图 1 Kalman 高斯滤波图形

## 2 非高斯噪声情形下设计滤波算法

若  $n$  维非零随机矢量  $X$  的估计为  $\tilde{X}$ , 估计误差  $\tilde{X} = X - \hat{X}$ , 误差协方差阵  $V = E\{\tilde{X}\tilde{X}^T\}$ , 则当误差  $\tilde{X}$  为  $n$  维高斯随机矢量时, 误差熵  $H(\tilde{X})$  为最大值。

即<sup>[7]</sup>

$$H(\tilde{X}) = n/2 \ln(2\pi e) + 1/2 \ln |V| \quad (10)$$

应用最小误差熵准则就是求  $H(\tilde{X})$  为最小时的  $\hat{X}$  作为随机矢量  $X$  估计。因此可以假定给定的  $X$  的误差  $\tilde{X}$  符合一个给定的高斯分布, 这时误差熵最大, 为最坏的估计, 具有最不不确定性。但是我们却希望选择的  $\hat{X}$  使得状态估计误差  $\tilde{X}$  具有主观偏见最小。

采用均值和输出残差或状态估计误差熵值极小化更适用于一般非高斯系统的滤波器设计。

令估计误差:

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t|t) \quad (11)$$

得到

$$\tilde{x}(t+1) = [I - k(t+1)C]A\tilde{x}(t) + w(t) - K(t+1)Cw(t) - K(t+1)v(k+1) \quad (12)$$

用数学表达就是如何设计三元组  $\{\tilde{x}(t), K(t+1), t\}$  使如下指标极小化<sup>[8]</sup>。

$$J = - \int \gamma(\tilde{x}(t), K(t+1), t) \ln(\gamma(\tilde{x}(t), K(t+1), t)) d\tilde{x} + \left( \int y\gamma(\tilde{x}(t), K(t+1), t) dy \right)^2 \quad (13)$$

指标中的第一项反映了状态估计的条件概率密度函数的熵的最小, 第二项指标表示希望达到无偏估计。这个要求表示了在最坏估计情况下主观偏见最小的解。比方差更具有一般性, 而方差极小化是熵极小化的一个特例。

非高斯噪声下的滤波算法:

假定如下系统

$$x(t) = x(t-1) + w(t-1) \quad (14)$$

$$t(t) = 0.6 * x(t) + v(t) \quad (15)$$

首先引入输出残差:

$$\tilde{X}(t+1) = [I - K(t+1)C]A\tilde{X}(t) + W(t) - K(t+1)CW(t) - K(t+1)V(k+1) \quad (16)$$

则其熵为:

$$H(\tilde{x}(t+1)) = - \sum_{t=0}^{N-1} r_e(\tilde{x}(t+1)) \ln r_e(\tilde{x}(t+1)) \quad (17)$$

或:

$$H(\tilde{x}(t+1)) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_e(\tilde{x}(t+1)) \ln r_e(\tilde{x}(t+1)) d\tilde{x}(t+1) \quad (18)$$

$r_e(\tilde{x}(t+1))$  为状态估计误差的概率, 假定服从  $N(0, \sigma^2)$ , 由结论(10) 当随机变量符合高斯分布时其熵为最大且为  $\ln(\sqrt{2\pi}\sigma)$ , 可以做出  $\sigma(t)$  的变化曲线如图 2 所示。

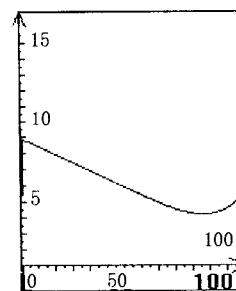


图 2 方差的变化规律

由此取当  $\sigma(t)$  为最小统计时的  $K$  为 Kalman 增益, 可得仿真的滤波图像如图 3 所示。

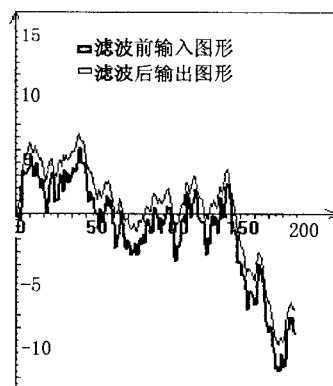


图 3 最小熵滤波图形

因为此时的统计量具有最小熵统计量的一致性, 其效果近似于线性最小方差情况下的 Kalman 滤波效果。可见应用熵的极小化更适用于非高斯情况下的 Kalman 滤波分析, 适用范围广而且可见高斯情况下的滤波是其中的一种特例。

(下转第 46 页)

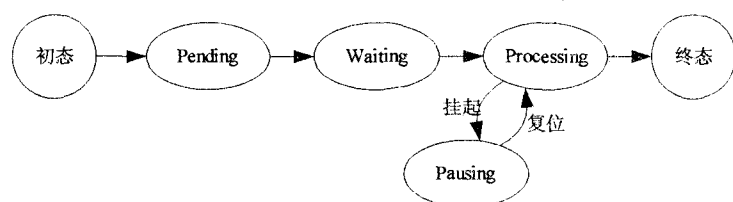


图 4 任务状态转换图

况下都确定了其执行者。任务指派过程首先根据任务指派基准确定可以执行此任务的群体人员,通常情况下这是一个包含多个人员的集合;然后根据任务指派方法确定由这个群体中的哪些个体来执行任务,执行任务的个体标识记录在相应任务记录的 STAFF\_ID 字段中。

#### (4) 依赖检查。

依赖检查指的是活动的前依赖规则的检查,调度中心在将任务切换到就绪状态之前将进行相关的前依赖规则检查,只有满足检查条件的任务才可以进行状态的切换。前文已经描述了前依赖规则在数据模型中的表示方法,这里主要讨论在控制模型中是如何对各种前依赖规则进行处理的。

#### (5) 转发控制。

当应用发出“结束任务”的外部请求时,该请求将触发调度中心启动“转发控制”。转发控制的主要依据在工作流数据模型中定义的后转发规则,后转发规则定义了当前活动与其后继活动之间的关系。转发控制的处理过程是根据“结束任务”请求中所携带的“任务结束标记”以及相应前趋活动和当前活动的活动标识

匹配 ROUTING\_RULE 表中的记录,从而得到相应的后继活动列表 NEXT\_ACT\_ID\_LIST;然后由调度中心根据后继活动列表启动“任务管理”为相应的后继活动新建任务。

#### (6) 启动控制。

启动控制负责常规自动活动所对应的自动执行体的启动并对其活动进行监控。

### 3 结束语

文中的研究重点是在电子政务建设中引入基于 Web 服务的分布式 workflow 管理系统,探讨 workflow 模型的创建、分布式 workflow 框架的选择以及嵌入式 workflow 执行引擎的技术实现,进而发挥 Web 服务的优势来克服现有电子政务系统应用协调方面的不足。

#### 参考文献:

- [1] 张晓东,柴跃廷,任守集.基于业务规则的事件驱动建模方法[J].清华大学学报,1999,39(7):25-28.
- [2] 李东波,徐平,韩祥兰.基于专家系统的工作流管理系统模型研究[J].南京理工大学学报,2001,25(1):96-99.
- [3] Sadiq W, Orłowska M. Analyzing process models using graph reduction techniques[J]. Information Systems, 2000, 25(2): 117-134.
- [4] 于蕾,王学通,王志晓.基于.NET技术的Web工作流模型研究[J].微机发展,2004,14(10):34-36.
- [5] 李宁,刘厚泉.一种支持分布式工作流模型的工作流管理系统[J].计算机应用研究,2006(3):205-213.

(上接第 42 页)

这样,就可以验证非高斯情况下,构造概率密度的函数表达式,其泛涵形式如下:

$$r(\bar{x}(t+1), \mathbf{K}(t+1), t)$$

可以调整增益矩阵  $\mathbf{K}(t+1)$ ,使之符合一个给定高斯形状的概率密度函数,这样即最坏情况的估计下,可以达到滤波的主观偏见最小的最优滤波估计。

### 3 实验结果分析及发展前景

由实验结果可知误差的方差具有最小值,此时增益非常接近高斯情况下计算出来的增益,因此滤波结果和常规方法算出的效果很接近,同时从宏观上对滤波器进行了最优的控制。通过熵的最小来设计非高斯滤波器的理论目前尚不成熟,但是它在非高斯滤波设计中却存在很广泛的应用价值,需要在应用中不断探索,总结经验。

#### 参考文献:

- [1] Anderson B D O, More J B. Optimal Filtering[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1979.
- [2] 陆如华,何于班.卡尔曼滤波方法在天气预报中的应用[J].气象,1994,20(9):41-43.
- [3] 陆如华,徐传玉,张玲,等.卡尔曼滤波的初值计算方法及其应用[J].应用气象学报,1997(18):35-42.
- [4] 邓自立.最优估计理论及其应用——建模、滤波、信息融合估计[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2005:90-120.
- [5] 邓自立.最优滤波理论及其应用——现代时间序列分析方法[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2001.
- [6] 李彦鹏,黎湘,庄钊文.一种快速 kalman 滤波算法实现及效果评估[J].电子与信息学报,2005(1):153-154.
- [7] 周荫清.信息理论基础[M].第3版.北京:北京航空航天大学出版社,2002.
- [8] 王朝珠,秦化淑.最优控制理论[M].北京:科学出版社,2003.