

N 皇后问题的快速搜索算法

王 哲, 栾英姿

(西安电子科技大学, 陕西 西安 710071)

摘要:回溯算法是解决 N 皇后问题的经典算法,最坏情况下,它的搜索时间和皇后维数 N 成指数关系,无法满足基于 Q -矩阵的 LDPC 码这种编码方案对码长的要求。介绍了一种解决皇后问题的快速搜索算法,它是使碰撞数最小化的本地搜索算法,这种算法的性能和回溯算法相比有极大的提高,搜索时间和皇后维数 N 基本成线性关系,并且有较强的灵活性,因而对于 Q -矩阵 LDPC 码这种编码方案而言,快速搜索算法更为合适。

关键词: Q -矩阵;回溯算法;快速搜索算法;LDPC 码

中图分类号: TP301.6

文献标识码: A

文章编号: 1673-629X(2009)06-0072-04

A Fast Search Algorithm for N-Queens Problem

WANG Zhe, LUAN Ying-zi

(Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: The backtracking algorithm is the classical algorithm for solving N queens problem. In the worst case, a backtracking algorithm is exponential with N , so it is not able to meet the requirements of the encoding scheme for Q -matrix LDPC code. In this paper, a fast search algorithm, which is probabilistic local search with conflict minimization is presented, the performance of this algorithm is more better than backtracking algorithm, it runs almost in linear time with N , and it is very flexible, so it's more appropriate for the encoding scheme for Q -matrix LDPC code.

Key words: Q -matrix; backtracking algorithm; fast search algorithm; LDPC code

0 引言

N 皇后问题是一个典型的搜索问题,即将 N 个皇后放置于一个 $N \times N$ 的棋盘上,并且不存在任意两个皇后互相攻击对方。

定义:任意一个矩阵元素在 $GF(2)$ 有限域上取值的 $N \times N$ 阶方阵(N 为任意正整数),它的每行、每列、每条对角线上均只有一个元素取 1,其余元素为 0,则称该矩阵为 Q -矩阵^[1]。

Q -矩阵有以下性质^[2]:

1) 循环移位性: Q -矩阵按列向左或者向右移动一位后,仍是 Q -矩阵。因此,只有搜索到其一种布局,通过循环移位性,就可以得到 N 种布局。

2) 正交性: Q -矩阵本身是正交矩阵,即 N 维 Q -矩阵的 N 个列矢量线性无关;

任意 N 维 Q -矩阵循环移位得到的 Q -矩阵之间

彼此正交。

近年来,人们提出了基于皇后矩阵(即 Q -矩阵)构造的 LDPC 码(Low Density Parity Code)的新码族。这个码族的编码原理是由多个 Q -矩阵排列构成 LDPC 码的校验矩阵 H ,具体排列方法如式(1)所示^[2]。这种 Q -矩阵 LDPC 码独到之处在于,对码长和码率参数的设计具有高度的灵活性^[3],因而有很好的发展前景。但是由于 LDPC 码是线性分组码,在码长较长时(1000 以上),才有较好的性能,并且由于编码器的构造原理,构成校验矩阵所需要的所有 Q -矩阵必须彼此正交,才能避免出现 4 环^[4],因而这些彼此正交的 Q -矩阵必须由同一个 N 维 Q -矩阵按列循环若干次得到的。只有当 N 值较大的时候,才能有足够的彼此正交的 Q -矩阵来构成校验矩阵 H 。综上所述,找到

$$H = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_1 & Q_1 & Q_1 & Q_1 & Q_1 & \cdots \\ Q_1 & Q_2 & Q_4 & Q_6 & Q_8 & Q_{10} & \cdots \\ Q_1 & Q_3 & Q_6 & Q_9 & Q_{12} & Q_{15} & \cdots \\ Q_1 & Q_5 & Q_{10} & Q_{15} & Q_{20} & Q_{25} & \cdots \\ Q_1 & Q_7 & Q_{14} & Q_{21} & Q_{28} & Q_{35} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (1)$$

收稿日期:2008-09-24;修回日期:2009-01-15

基金项目:国家自然科学基金重大项目(60496316)

作者简介:王 哲(1983-),女,硕士研究生,研究方向为多载波码分多址中的关键技术;栾英姿,副教授,研究方向为多载波码分多址中的关键技术。

维数 N 较大的 Q -矩阵的布局成为这种编码方案的重要一环。

1 N皇后问题的回溯算法原理简介

解决皇后问题的经典算法是回溯算法,回溯算法的思路可以认为是正向的,它是根据皇后矩阵的定义,每行,每列,每条对角线上只能有一个皇后这个原则,致力于逐个找出每列(行)的皇后的合适的位置,当 N 个皇后都放到了合理的位置,并全部符合原则时,就是一个布局。但是为当前皇后找到适当位置后,如果会导致下个皇后无论放在哪个位置都引发碰撞,就必须重新为当前皇后寻找一个位置,然后再次检验下一个皇后是否能找到合理的位置^[5],以此类推,当前皇后的所有可能的位置都穷尽之后,仍不能满足要求,则说明前一个皇后的位置必须更新。由此可见,此算法虽然可以求出 N 皇后问题的布局,但最坏表现为运行时间与 N 成指数关系,所以很难求出 N 值较大时的皇后布局。

由于回溯算法本身的限制,通过这种算法搜索到的第一个布局总是确定的,这将限制 Q -矩阵准规则 LDPC 码编码方案的灵活性。如图 1 所示,找到第一种布局所需要的时间与维数 N 有关:只要维数 N 确定,每次运行时找到的第一种布局都是相同的。搜索时间可能在某个特定的维数 N 处有所摆动,因为可能出现这样的情况: N 值小的,得到第一种布局需要的回溯次数反而较多。但是从平均意义上来看,搜索时间基本上是指数增长的。

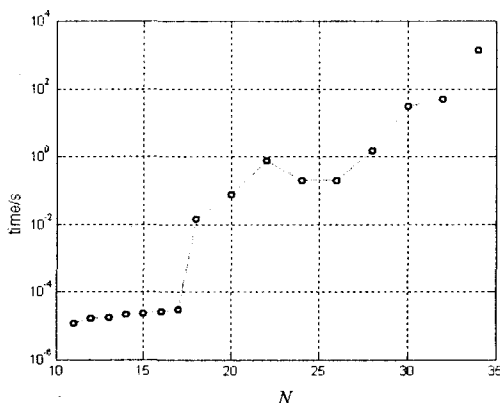


图1 皇后矩阵维数 N 与回溯算法搜索出第一个布局所需时间的关系图

可以得出如下结论:当维数 N 超过 36 时,通过回溯算法找到皇后问题的一种布局的效率过低(高达 15437.9 秒),对于较大的 N 值(超过 100),经典的回溯算法已经很难求皇后问题的布局。这严重限制了 Q -矩阵准规则 LDPC 码这种编码方案的码长,并且从

编码的灵活性角度讲,也使该编码方案受到极大的局限。因此,需要一种新的方法,可以快速有效地找出维数 N 较大的皇后的问题的布局,且每次运行搜索到的第一个布局都不相同,来满足 Q -矩阵 LDPC 码这种编码方案对码长和灵活性的要求。

2 N皇后问题的快速搜索算法

下面要介绍的 N 皇后问题的高效搜索算法,与经典的回溯算法的思路完全不同。可以认为它是逆向的思维。先随机产生 $1 \sim N$ 之间的不重复的随机数,作为 queen 的初始值,也就是先给出一种皇后的布局,然后判断它是否符合要求,如果满足要求,就说明它是一种布局,否则,就把每条对角线上碰撞的皇后数,碰撞的次数,碰撞皇后的列下标记记录下来。随机产生一个 $1 \sim N$ 之间的自然数,与一个碰撞的皇后的列下标交换,检验是否会减少碰撞数,如果交换令碰撞数为 0,则交换后的皇后就是一个布局,如果交换能另碰撞数减小,但不为 0,就把 queen 更新为碰撞交换的结果,更新每条对角线上碰撞的皇后数,碰撞的次数,碰撞皇后的列下标记,重复交换过程。如果交换一定次数后,仍然无法找出一个布局,则重新随机生成 queen,重复搜索过程,直至找到一种布局为止。

算法流程如图 2 所示。

待解决的问题:为了找到 N 皇后的布局,要解决三个问题:其一是每行每列只能有一个皇后;其二是每条对角线上也只能有一个皇后;最后,要把碰撞的皇后记录下来。

2.1 每行每列只含一个皇后的问题

N 为长度,即棋盘为 $N \times N$,并且每行只含有一个皇后。当 N 个皇后均被安排好再在棋盘上的位置后,它们所在的对应的行位置被存储于长为 N 的数组 queen 中。queen[i] = k 表示第 i 列的皇后(也就是 1)被放在该列的第 k 行。所以只要数组 queen 中存放的数为整数 $1 \sim N$ 的不重复的排列,就能确保不会存在两个皇后在相同行或列相互攻击。

2.2 对角线上出现皇后的碰撞问题

在一个 $N \times N$ 的棋盘上,含有两种形式的对角线:斜率为正数的正对角线和斜率为负数的反对角线。令 i 是第 i 列的下标, j 是第 j 列的下标,假设下标由左下角开始,对于棋盘上所有反对角线(斜率为负的对角线),行列下标之差是一个常数。与之相似的,对于所有经过正对角线(斜率为正的对角线)上的棋盘上的方格,其行列下标之和也为常数。对于不同对角线而言,和与差是不相同的,则它们就可以作为区别不同对角线的特征^[6]。

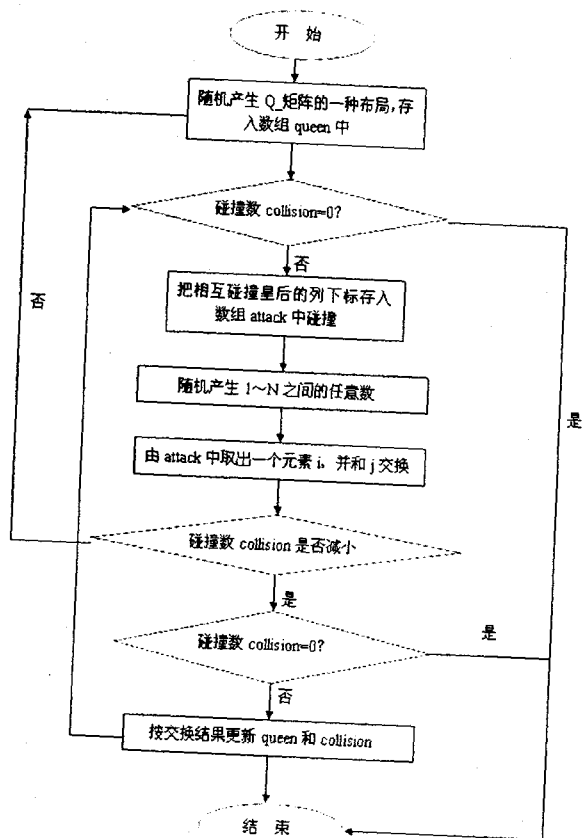


图 2 算法流程

图 3 是 queen = [1, 3, 4, 2, 5] 的棋盘, 对于其中皇后可表示为 (i, j), i 表示行, j 表示列。

	1	2	3	4	5
1	Q				
2				Q	
3		Q			
4			Q		
5					Q

图 3 皇后棋盘图

如图 3 所示, 反对角线上皇后 (3, 2) 和皇后 (4, 3) 碰撞。

一个列下标为 i , 行下标为 $queen[i]$ 的方格, 就在反对角线 $i - queen[i]$ 上, 也在正对角线 $i + queen[i]$ 上, 而 $i - queen[i]$ 的范围是 $1 - N, \dots, N - 1$, $i + queen[i]$ 的范围是 $2, \dots, 2 \times N$ 。一个被定义为 d_n 的长度为 $2 \times N$ 的数组, 存储反对角线上的皇后数, 类似的, 数组 d_p 用来存储正对角线上的皇后数。如果在第 $i + queen[i]$ 条正对角线上有 k 个皇后, 则 $d_p[i + queen[i]] = k$ 。但是如果 $[i - queen[i]]$ 条反对角线上有 k 个皇后, 由于 d_n 表示的对角线的引用, 有一部分是负数, 所以不能直接用 $d_n[i - queen[i]]$, 而是用 $d_n[n + i - queen[i]]$ 。

任意一条对角线上的碰撞数比该对角线上的皇后

数少^[6]。

函数 $negative_positive(queen, n)$ 用来初始化 d_n 和 d_p , 其中 $queen$ 是初始的皇后布局, 它是随机产生的, $1 \sim N$ 范围内不重复的序列。函数 $compute_collisions(queen, d_n, d_p, N)$ 的返回值是按最初的皇后放置方法时, 所有对角线上的碰撞总数。

2.3 关于被碰撞的皇后数

定义一个长为 N 的数组 $attack$, 是用来加速搜索进程的。这个数组是用来存放与其他皇后碰撞的皇后的列下标的^[6]。数组 $attack$ 由函数 $compute_attacks(queen, d_n, d_p, N)$ 计算出, 此函数的返回值即为被碰撞的皇后数。

3 仿真结果分析

仿真结果如图 4 所示。

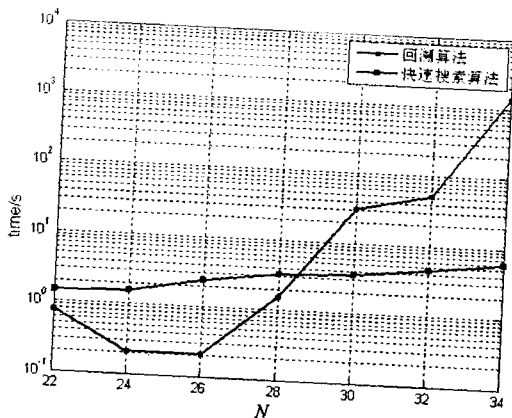


图 4 回溯算法和快速搜索算法

找到一种布局所需时间对比

由图 4 可以发现, 当维数 N 较小时 (小于 28), 快速搜索算法并未表现出其优越性, 但随着 N 的增加 (大于 30), 该算法的优越性越来越明显 ($N=34$ 时, 快速搜索算法只需 5.9867 秒, 而回溯算法需要 1382.78 秒)。

图 5 的上下函数图均为单次运行的结果。首先, 该算法在每一次运行时, 都产生不同的布局, 这将更满足准规则 Q -矩阵 LDPC 码这种编码方案对皇后矩阵的需求。其次, N 一定时, 每次运行时搜索到一个布局的时间也有很大的差异。以上两点都是由于这种快速搜索算法完全基于随机性原理: $queen$ 的初始布局是随机产生的, 与 $attack$ 中存放的碰撞皇后所在列交换的列下标也是随机产生的, 算法里面充满了随机化。

图 6 为循环 100 次后取平均的结果 (对于每个特定的维数 N , 搜索出 100 个解的总时间, 取平均), 可以得到搜索时间与维数基本上是呈线性关系^[7]。维数为 100 时, 所需要的平均时间只有 1600 秒, 而图 5 上图

显示单次运行中只用了 50 秒。这已经能够满足 Q -矩阵准规则 LDPC 码这种编码方案对 Q -矩阵的要求。

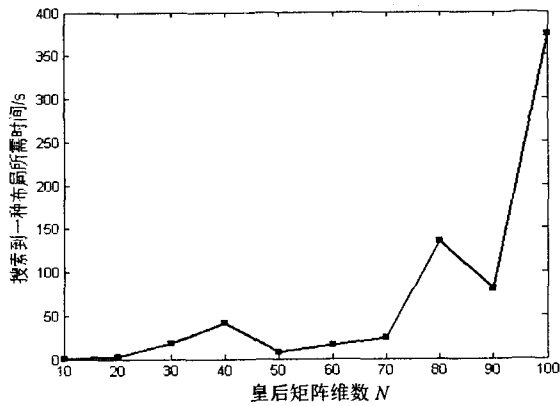
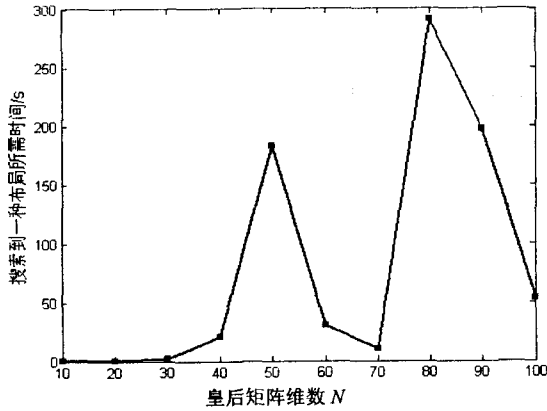


图 5 随着维数 n 变化的, 单次运行所需搜索时间

4 结束语

介绍的快速搜索算法能够比经典的回溯算法更快速、灵活地找到 N 皇后问题的一种布局, 因而更满足准规则 Q -矩阵 LDPC 码这种编码方案对皇后矩阵的需求。并且在维数 N 较大时, 更加显示出其优越性。虽然该算法不能找出 N 皇后问题的所有解(能够找出所有解的算法必须是指数的), 但在实际应用中, 往往不需要得到其所有布局。

(上接第 71 页)

(UAI-98). Sar Francisco: ACM Press, 1998: 43-52.

[3] Sarwar B, Karypis G, Konstan J, et al. Item-based collaborative filtering recommendation algorithms[C]//Proceeding of the 10th International World Wide Web Conference. New York: ACM Press, 2001: 285-295.

[4] 余力, 刘鲁. 电子商务个性化推荐研究[J]. 计算机集成制造系统, 2004, 10(10): 1306-1312.

[5] 王宏超, 陈未如, 刘俊. 基于客户聚类的商品推荐方法的

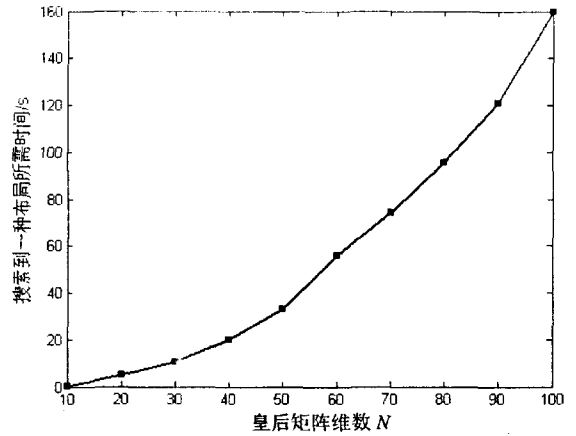


图 6 随着维数 N 的变化, 循环 100 次平均搜索时间
由于此算法的随机性原理, 它的随机程度直接影响算法的性能, 算法中随机函数的随机性越强, 搜索到 Q -矩阵布局的时间就会越短。因而如果能进一步提高算法中随机函数的随机性, 此算法的性能有望进一步提高。

参考文献:

[1] 彭立, 朱光喜. 不同置换矩阵对基于分块 H 矩阵的 LDPC 码性能的影响[J]. 计算机学报, 2008, 31(5): 783-792.

[2] 彭立, 朱光喜. 基于 Q -矩阵的 LDPC 码编码器设计[J]. 电子学报, 2005, 33(10): 1734-1740.

[3] 姜慧源, 田斌, 易克初. 准规则 Q 矩阵 LDPC 码编码器设计[J]. 电视技术, 2007, 31(11): 19-21.

[4] 彭立, 朱光喜. Q -矩阵准规则 LDPC 码编码器方案的研究[J]. 计算机工程与科学, 2005, 27(6): 81-82.

[5] 张万军. N 皇后问题回溯算法探讨[J]. 宜宾学院学报, 2006, 6(6): 64-66.

[6] Sosic R, Gu Jun. Fast Search Algorithms for the Q -queens Problem[J]. IEEE Transactions System, Man, and Cybernetics, 1991, 21(6): 1572-1576.

[7] Sosic R, Gu Jun. Efficient Local Search Conflict Minimization: A case Study of the n -Queens Problem[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 1994, 6(5): 661-667.

研究[J]. 计算机技术与发展, 2008, 18(7): 212-214.

[6] 程岩, 肖小云, 吴洁倩. 基于聚类分析的电子商务推荐系统[J]. 计算机工程与应用, 2005(24): 175-177.

[7] 张娜, 何健民. 基于项目与客户聚类的协同过滤推荐方法[J]. 合肥工业大学学报: 自然科学版, 2007, 30(9): 1159-1162.

[8] 游文, 叶水生. 电子商务推荐系统中的协同过滤推荐[J]. 计算机技术与发展, 2006(9): 70-72.