第21卷 第12期
2011年12月

计算机技术与发展
COMPUTER TECHNOLOGY AND DEVELOPMENT

Vol.21 No.12
Dec. 2011

基于最小费用最大流问题的“排序”算法

赵礼峰,宋常城,白 睿
(南京邮电大学 理学院,江苏 南京 210003)

摘 要:由于现有的求解最小费用最大流问题的方法都存在其局限性,为了更好地解决实际问题,在已有最短路算法以及最小费用算法的基础上作了改进,给出了一种求解基于最大流的最小费用问题的算法。文中针对小规模网络给出求两点之间最小费用的一种简单易行的方法,此外该算法可以在一个图上完成,这样可以节省许多画图时间,增强了算法的直观性和可控性。并且构建石油运输的网络模型,结合最小费用最大流算法,给出该模型从产地到销地的最优运输方案,最后通过具体的模型实例验证了该方法的效率和实用性。

关键词:最短路;运输网络;容量-费用网络;最小费用最大流

中图分类号:TP301.6　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1673-629X(2011)12-0082-04

Sequence Algorithm Based on Minimum Cost and Maximum Flow

ZHAO Li-feng, SONG Chang-cheng, BAI Rui
(School of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)

Abstract: Due to the limitations of existing solving the minimum cost and maximum flow method, in order to better solve practical problems, propose a algorithm to solve the problem of the minimum cost and maximum flow based on the existing shortest path algorithm and minimum cost algorithm. A simple algorithm to solve the problem of the shortest path between two points in a small-scale networks is discussed. Moreover, the algorithm can be finished in a graph, so can save a lot of drawing time, improve the algorithm's intuition and controllability. And design a network model of oil transportation, then combining with the minimum cost and maximum flow algorithm, give the best scheme of transportation from the origin to the market, at last validate the efficiency and practicability of the method through concrete models.

Key words: shortest path; transportation network; capacity-cost network; the minimum cost and maximum flow

1 问题的提出

最短路问题在近半个世纪以来一直是人们所关注的一个优化问题,它是指在一个赋权图的两个节点之间找出一条具有最小权的路径。在近五十多年的研究历史中,人们已经建立了关于最短路问题较为完善的理论,并设计了一系列求解最短路的算法[1-3],还有一些关于最短路算法的实现。

此外,近年来随着计算机科学技术和网络的快速发展,关于求解两点之间最短路的问题得到了更深的研究,许多学者在主流算法的基础上纷纷提出了许多改进的算法。文中主要是在已有算法的基础上,介绍一种求两点之间最短路的方法,进而给出一种改进的最小费用最大流的算法。

收稿日期:2011-04-14;**修回日期**:2011-07-20

基金项目:国家自然科学基金项目(61070234,61071167)

作者简介:赵礼峰(1959-),男,安徽淮北人,教授,硕士研究生导师,研究方向为图论及其应用;宋常城(1989-),男,安徽淮北人,硕士研究生,研究方向为图论及其应用。

2 问题的分析

2.1 基本概念

定义1 赋权图。

对图 G 的每条边 e,赋以一个实数 $w(e)$,称为边 e 的权(在这里权值可以为弧上的容量、流量、费用)。每条边都赋有权的图称为赋权图[4]。

定义2 最短路。

给定的赋权图 G 及 G 中两点 v_s, v_t,求 v_s 到 v_t 的具有最小权的路称为 v_s 到 v_t 的最短路。

定义3 容量—费用网络。

设 $G=(V,E,c)$ 是一个带始点 v_s 和终点 v_t 的容量网络。对于每条弧 (v_i,v_j),除了给出每条弧的容量 c_{ij} 之外,还给出了单位流量的费用 $\omega(v_i,v_j)=\omega_{ij}\geqslant 0$,这样称网络 G 为容量 — 费用网络,记 $G=(V,E,c,\omega)$。设 f 是容量—费用网络 G 上的一个可行流,称 $\omega(f)=\sum_{(v_i,v_j)\in E}\omega_{ij}f_{ij}$ 为可行流的费用。

定义4 最小费用流。

设 v_0 是给定的一个非负数,最小费用流问题就是

在带始点为 v_s 和终点为 v_t 的容量—费用网络 G 中求一个定流值为 v_0,且费用最小的可行流,这样的流称为最小费用流[5]。其数学模型为

$$\min z = \sum \omega_{ij} f_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 0 \leqslant f_{ij} \leqslant c_{ij}\ i,j = s,1,2,\cdots,n,t \\ \sum_{j=s}^{n} f_{sj} = v_0 \\ \sum_{j=s}^{n} f_{ji} - \sum_{j=s}^{n} f_{ij} = 0\ i = 2,3,\cdots,n,t \\ \sum_{j=s}^{n} f_{jn} = v_0 \\ (v_i,v_j) \in E \end{cases}$$

定义 5　最小费用最大流。

所谓最小费用最大流就是在容量-费用网络 $G = (V,E,c)$ 中求一个费用最小的最大流。

2.2　问题描述

最短路问题一般描述如下:在一个网络中,给定一个始点和一个终点,求从始点到终点的一条路径,使得路长最短(即路径的各边权数之和最小)。其中路径可以指距离,也可以指时间、费用等,从而相应的最短路径问题也可以转化成为最短时间、最小费用等问题。通常求最短路最常用的几种算法有最短路的拓扑排序法、Dijkstra 算法、Ford 算法、Folyd 算法等。在这里不再详细介绍,具体算法请参见文献[6]。下面文中给出在以上几种求最短路算法基础上针对简单的网络所用的求最短路的一种方法,进而改进最小费用最大流的算法。

3　新算法的思想及步骤

3.1　算法思想

最短路算法的目标是在赋权有向图 G 中求出 v_s, v_t 两点的最短距离,那么首先要做的便是要找出 v_s 与 v_t 之间所有的有向路径,因为最短路径肯定是这些有向路径中的某一条,然后求出 v_s,v_t 之间所有有向路径的权值,其中权值最小的有向路径即是要求的 v_s 到 v_t 的最短路。在这里以求单位费用网络中的最短路为例,其它的如流量、容量的最短路算法与其类似。

3.2　算法步骤

Step1 构造赋权有向图 G',定义 G' 中弧的权为单位费用值;

Step2 列出 G' 中 v_s 到 v_t 的所有有向路径 $S_1,S_2,\cdots,S_r$;

Step3 计算出所罗列有向路径 $S_1,S_2,\cdots,S_r$ 的费用权值 $w_1,w_2,\cdots,w_r$,则权值最小 w_i 所对应的路径 P_i 便是 v_s 到 v_t 的最短路径,算法结束。

注:路径可以指距离,也可以指时间、费用等[7,8],当指费用时,求出的就是最小费用路。当在网络中再增加一个流量限制条件,利用上述的最小费用路算法可以得到预定流值为 v_0(或者最大值)的最小费用路的算法(或者最小费用最大流算法)。

因为在网络中至少有一条有向路径,所以此时仅需要将所有有向路径按照权值从小到大排序,然后按照顺序依次增广,直至增广到预定流值 v_0(或者不存在可增广路径)为止。具体算法如下:

Step0 构造赋权有向图 G',定义 G' 中弧的权为单位费用值;

Step1 列出 G' 中 v_s 到 v_t 的所有有向路径 $S_1,S_2,\cdots,S_r$;

Step2 计算出所罗列有向路径 $S_1,S_2,\cdots,S_r$ 的费用权值 $w_1,w_2,\cdots,w_r$,把费用权值从小到大排序;

Step3 按权值从小到大的顺序依次对所罗列的满足增流条件的有向路径增流,直至增流至预定流值 v_0(或者不存在可增广路径)为止,则 $P_1,P_2,\cdots,P_s(1 \leqslant s \leqslant r)$ 便是 v_s 到 v_t 的满足预定流值 v_0(或者不存在可增广路径)的最小费用路径。算法结束。

注:假设 $P_1,P_2,\cdots,P_i,P_{i+1},\cdots,P_s$ 是按权值从小到大的顺序排列,在增广过程中可能会出现由于 P_i 的增广时产生了饱和弧,导致有向路径 P_{i+1} 不能走,此时只需要跳过此路径,依次序继续往下增广,直至达到预定流值 v_0(或者不存在可增广路径)为止。具体增流过程可参见参考文献[9]。

3.3　算法的复杂度

设容量网络 G 的顶点数为 n,弧数为 m,c_{max} 为 G 中所有弧容量的最大值。

算法的第一步寻找 v_s 到 v_t 的所有有向路径,最多执行 nm 次,得到容量网络 G',每次构造容量网络 G' 的复杂性为 $O(nm)$,而在第三步中沿最小费用路径增广的次数不会超过 nc_{max},于是整个“排序”算法的复杂性为 $O(n^2mc_{max})$,即知这是一个强多项式算法。

3.4　算法的可行性分析

下面主要从两部分说明上述“排序”算法是正确的。第一,算法的三个步骤可以有效地执行;第二,算法经过有限步后都会终止,不会出现死循环。

(1)算法的三个步骤可以依次地执行。

算法第一步是寻找从 v_s 到 v_t 的所有有向路径,由于容量网络 G 的顶点集、弧集都为非空有限集合,所以第一阶段执行 nm 步后会终止。之后是计算出所罗列出的有向路径的费用权值,并把费用权值从小到大排序。算法的第三个步骤是按权值从小到大的顺序依次对所罗列的满足增流条件的有向路径增流,直至增流

至最大（或者不存在可增广路径）为止，因为所罗列满足条件的有向路径是存在的，所以第三步也可以进行。算法可执行。

（2）算法经有限步后会终止。

当算法终止时，得到的有向网络是一个费用最小、流量最大的网络。

因为初始网络的流量为可行流，在此基础上进行有限步的调整。在调整过程中，既满足弧的“容量条件”[10]，又满足流量的“守恒条件”[11]，所以调整结束后，有向流网络中的流仍为可行流，直至弧达到饱和。

算法终止时，从源点到汇点的每一条有向路径上至少有一条饱和弧，网络中不存在从 v_s 到 v_t 的有向路径，所以，所求的有向网络中是一个最小费用最大流网络。

因此，算法是正确的。

4 改进的最小费用最大流算法在石油运输中的应用

4.1 石油运输模型

有一家石油公司，该公司拥有一个运输管道网络，用这个网络可以把石油从采地运送到一些销售地，在这里为了方便以后的算法比较说明，不妨假设图1为这个石油运输网络的一部分，其中每段弧 (v_i,v_j) 的前一个数字表示管道的容量 c_{ij}，后一个数字表示该管道的运输过程中所产生的费用 ω_{ij}，其中 c_{ij} 的单位为 t/h，ω_{ij} 的单位为元/ h。现在需要制定一个运输方案，使得该石油运输管道网络从 v_s 到 v_t 的运输能力最大且费用最少。

若将此运输系统看作是一个始点（产地）为 v_s，终点（销地）为 v_t 的容量网络 $G=(V,E,c,f)$，其中 V 为 v_s 与 v_t 之间的两条或两条以上的管道的交汇点，E 表示相应顶点的 m 条弧的非空有限集合，这里每条弧 $(v_i,v_j)\in E$ 表示从 v_i 到 v_j 的运输线，弧上的权值 c 表示该管道的最大负荷量（即容量），ω 表示该管道中已有的石油运输量（即流量）。

于是上述问题归结为求容量网络 G 的最小费用最大流问题[12]。

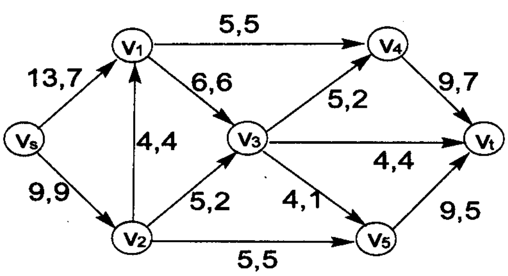


图1 容量费用网络

4.2 模型求解

给出图1所示石油运输网络的最佳运输方案。

首先构造赋权有向图 G'，如图2所示，然后找出图2中从 v_s 到 v_t 的所有有向路径，并计算出增流值 $\delta_i(i=1,2,\cdots,12)$。

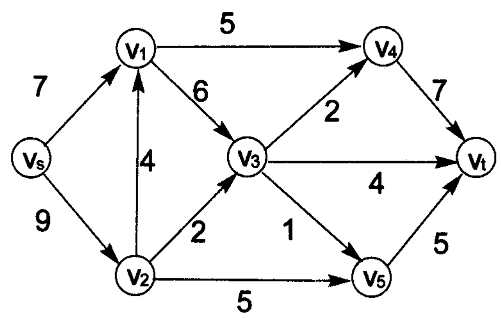


图2 图1的赋权有向图

$$v_s\begin{cases} v_1\begin{cases} v_4\ v_t \\ v_3\begin{cases} v_4\ v_t\\ v_t\\ v_5\ v_t\end{cases}\end{cases} \\ v_2\begin{cases} v_1\begin{cases}v_4\ v_t\\ v_3\begin{cases}v_4\ v_t\\ v_t\\ v_5\ v_t\end{cases}\end{cases}\\ v_3\begin{cases}v_4\ v_t\\ v_t\\ v_5\ v_t\end{cases}\\ v_5\ \ v_t\end{cases}\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} S_1: v_sv_1v_4v_t, & \delta_1=19 \\ S_2: v_sv_1v_3v_4v_t, & \delta_2=22 \\ S_3: v_sv_1v_3v_t, & \delta_3=17 \\ S_4: v_sv_1v_3v_5v_t, & \delta_4=19 \\ S_5: v_sv_2v_1v_4v_t, & \delta_5=25 \\ S_6: v_sv_2v_1v_3v_4v_t, & \delta_6=28 \\ S_7: v_sv_2v_1v_3v_t, & \delta_7=23 \\ S_8: v_sv_2v_1v_3v_5v_t, & \delta_8=25 \\ S_9: v_sv_2v_3v_4v_t, & \delta_9=20 \\ S_{10}: v_sv_2v_3v_t, & \delta_{10}=15 \\ S_{11}: v_sv_2v_3v_5v_t, & \delta_{11}=17 \\ S_{12}: v_sv_2v_2v_t, & \delta_{12}=19 \end{array}$$

可以看出以上12条有向路径按照增流值从小到大排序依次为：$S_{10},S_3,S_{11},S_1,S_4,S_{12},S_9,S_2,S_7,S_5,S_8,S_6$。按照这个顺序，依次对容量网络进行增流直至达到不再存在从 v_s 到 v_t 的可增广路径为止。

下面用上面找出的最短路径来具体求解一下该石油运输网络模型。

解 设置初始可行流为零流，即 $f_0=0$，$v(f)=0$。构造剩余网络 $D(f_0)$ 如图3(a)。

在 $D(f_0)$ 中找最小费用路 $P_0:v_sv_2v_3v_t$，其中 $\theta_0=4$，对 f_0 进行增广得到 f_1，得到 $v(f)=4$，构造剩余网络 $D(f_1)$。

在 $D(f_1)$ 中找最小费用路 $P_1:v_sv_2v_3v_5v_t$，其中 $\theta_1=1$，对 f_1 进行增广得到 f_2，得到 $v(f)=5$，构造剩余网络 $D(f_2)$。

在 $D(f_2)$ 中找最小费用路 $P_2:v_sv_1v_4v_t$，其中 $\theta_2=5$，对 f_2 进行增广得到 f_3，得到 $v(f)=10$，构造剩余网络 $D(f_3)$。

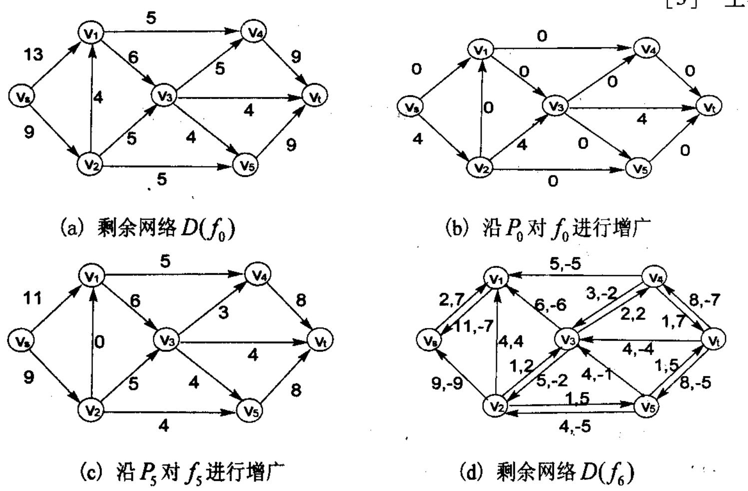
在 $D(f_3)$ 中找最小费用路 $P_3:v_sv_2v_5v_t$，其中 $\theta_3=4$，

对f_3 进行增广得到f_4，得到 $v(f)=14$，构造剩余网络 $D(f_4)$ 。

在 $D(f_4)$ 中找最小费用路 $P_4:v_s v_1 v_3 v_5 v_t$，其中 $\theta_4=3$，对f_4 进行增广得到f_5，得到$v(f)=17$，构造剩余网络 $D(f_5)$ 。

在 $D(f_5)$ 中找最小费用路 $P_5:v_s v_1 v_3 v_4 v_t$，其中 $\theta_5=3$，对f_5 进行增广得到f_6，得到$v(f)=20$，构造剩余网络 $D(f_6)$，整个过程如图(d)。由图(d)可以看出不存在(v_s,v_t)路。从而f_6 为最小费用最大流，因此运输过程中输送石油方案如图(c)所示，其中最小费用为：

$$\omega(f_6)=11\times7+9\times9+0\times4+6\times6+5\times5+5\times2+4\times5+4\times1+3\times2+4\times4+8\times7+8\times5=371$$



(a) 剩余网络 $D(f_0)$　　(b) 沿 P_0 对 f_0 进行增广

(c) 沿 P_5 对 f_5 进行增广　　(d) 剩余网络 $D(f_6)$

图 3　对图 1 的最小费用最大流求解示意图

5　结束语

最短路径算法在工程中的应用越来越重要，如何获得一种高效的最短路径算法是值得研究的，文中在已有求两点之间最短路的基础上给出了一种针对小规模的网络求两点之间最短路的一种简单易行的方法，并以石油运输网络为数学模型，结合最小费用最大流算法从而给出从产地到销地的最优方案，与以往算法相比加快了执行速度，节省计算时间，直观性强，计算方便，最后通过具体的模型验证了该方法的效率和实用性。但是文中的缺陷在于只针对小规模网络计算比较方便，如何寻找针对大规模网络求最小费用最大流的方法仍值得深究。

参考文献：

[1] 王苏男，宋　伟，姜文生. 最短路径算法的比较[J]. 系统工程与电子技术，1994，16(5)：43-49.

[2] Torrieri D. Algorithms for finding an optimal set of short disjoint paths in a communication network[J]. IEEE Transactions on Communications，1992，40(11)：1698-1702.

[3] 王海梅，周献中. 网络系统中的最短路径分析及其应用研究[J]. 兵工学报，2006，27(3)：515-518.

[4] 张先迪，李正良. 图论及其应用[M]. 北京：高等教育出版社，2005.

[5] Ebrahim R M，Razmi J. A hybrid meta heuristic algorithm for bi-objective minimum cost flow (BMCF) problem[J]. Advances in Engineering Software，2009，40：1056-1062.

[6] 谢　政. 网络算法与复杂性理论[M]. 长沙：国防科技大学出版社，2003.

[7] 胡金初. 网络流的分析及研究[J]. 计算机科学，2009，36(1)：293-295.

[8] 王志强，孙志军. 网络最大流的新算法[J]. 计算机工程与设计，2009，30(10)：2357-2359.

[9] 赵礼峰，陈　华，宋常城，等. 求解网络最大流的筛选算法[J]. 模糊系统与数学，2010，24：157-162.

[10] Minoux M. On robust maximum flow with polyhedral uncertainty sets[J]. Optim Lett.，2009(3)：367-376.

[11] Hamacher H W，Pedersen C R，Ruzika S. Multiple objective minimum cost flow problems[J]. A Review European Journal of Operational Research，2007，176：1404-1422.

[12] 程德文，吴育华. 求最小费用最大流的改进标号法[J]. 系统管理学报，2009，18(2)：237-240.

(上接第 81 页)

[7] 杨水根. 主机标识协议的移动性管理研究[D]. 北京：北京交通大学，2009.

[8] 张宏科，苏　伟. 新网络体系基础研究——一体化网络与普适服务[J]. 电子学报，2007，35(4)：599-606.

[9] 刘晓波，姚　楠，董　平，等. 一体化网路中身份与位置映射关系的解析方法研究[J]. Journal of Internet Technology，2008，9(5)：371-376.

[10] Xie J，Akyildiz I F. An optimal location management scheme for minizing signaling cost in mobile IP[C]// Proceedings of the IEEE International Conference on Communications (ICC). New York，USA：IEEE Press，2002：3313-3317.

[11] Yang S，Qin Y，Yang D. Dynamic hierarchical location management scheme for host identity protocol[C]//Lecture Notes in Computer Science (LNCS). Beijing，China：Springer-Verlag，2007：185-196.

[12] Xie H，Tabbane S，Goodman D J. Dynamic location area management and performance analysis[C]// Proc. 43rd IEEE Vehicular Technology Conference. [s. l.]：[s. n.]，1993：536-539.

[13] Ma W，Fang Y. Dynamic hierarchical mobility management strategy for mobile IP networks[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications，2004，22(4)：664-676.