

# 基于阈值的 Mallat 变换法的设计与仿真

李圣普, 王小辉, 时合生

(平顶山学院 计算机科学与技术学院, 河南 平顶山 467002)

**摘要:**小波分析对于信号处理具有十分重要的作用。在已知噪声频率范围情况下使用传统 Mallat 小波变换方法对信号处理效果较好,但这种方法无法消除信号中的大量未知白噪声。文中讨论在 Mallat 变化法基础上引入 SURF 阈值,对小波进行过滤处理,实现有效过滤白噪声。文中设计了基于 SURF 阈值改进的 Mallat 变换法,并在 Matlab 环境下进行去噪实验,通过将实验结果与单一 Mallat 小波变换法结果进行对比,结果显示改进后的 Mallat 小波变换法可以去除大量白噪声,使信号更加光滑、保真。

**关键词:**小波分析;Mallat 法;SURF 阈值法;信号去噪

中图分类号:TP391.9

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2014)04-0107-03

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2014.04.027

## Design and Simulation of Mallat Transform Method Based on Threshold

LI Sheng-pu, WANG Xiao-hui, SHI He-sheng

(School of Computer Science and Technology, Pingdingshan University, Pingdingshan 467002, China)

**Abstract:** Wavelet analysis has plays a very important role for the signal processing. Mallat wavelet transform method can be better signal processing in the case of the noise frequency range are known, but not eliminate the unknown white noise signal. Introduce SURF threshold based on Mallat transform method for wavelet filter processing, which can effectively filter white noise. Improved Mallat transform method is designed based on the SURF threshold, and carry out the denoising experiment under the Matlab environment. Compared the experiment results with a single Mallat wavelet transformation method results, indicate that improved Mallat wavelet transform method can remove a lot of white noise, making the signal smoother.

**Key words:** wavelet analysis; Mallat method; SURF threshold; signal denoising

### 0 引言

近段时间小波分析是发展十分迅速的一个领域,在信号处理方面具有非常重要的作用。Mallat 小波变换在信号处理方面具有高速高效的优势,但随着电磁环境的逐渐复杂,且对信号质量要求更苛刻的情况下, Mallat 变换法无法胜任。文中在 Mallat 变换法的基础上引入 SURF 阈值,对低频信号进行处理,得到可以使含噪声信号更加光滑,有效减少伴随性振动的效果。

### 1 小波变换的提出

小波变换消噪技术,可以有效提高信号质量,处理信号能力速度极高。

传统信号分析方法建立在 Fourier 变换的基础上,其变换与逆变换公式为

$$F(\omega) = F[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1)$$

$$f(t) = F[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2)$$

式(1)、(2)表述了频域整体和时域整体的信号性质变换。小时域内 Fourier 变换将伪平稳信号划分成无数个小时域,每个小时域内的信号都可以看作是平稳信号,分析这些时域内的信号,可以表述出信号的频率。在小时域内 Fourier 变换的思想是:假定非平稳信号在窗口分析函数  $g(t)$  的非常小的时间间隔内是平稳的,将窗口分析函数移动<sup>[1]</sup>,使函数  $f(t)g(t-\tau)$  在不同的小时域内表现为平稳信号,这样可以计算出目标信号的不同时域内的频谱。公式(3)表示小区域  $R$  内的 Fourier 变换。

$$F(\omega, t) = \int_R f(t) \bar{g}(t-\tau) e^{-i\omega t} dt \quad (3)$$

其中,  $\bar{g}(t)$  表示函数  $g(t)$  的复共轭函数。公式 (3) 中  $e^{-i\omega t}$  具有有限频的作用<sup>[2]</sup>,  $g(t)$  起着限时的作用。随着时间  $\tau$  的逐渐变化,  $g(t)$  所确定的“时间窗”也随之在时间轴上移动, 使  $f(t)$  不断进行小区域上的分析。与此同时信号  $F(\omega, t)$  的展开就可以表示为在  $[\tau - \sigma, \tau + \sigma]$  小时域与  $[\omega - \varepsilon, \omega + \varepsilon]$  小频域的状态<sup>[3]</sup>。为了达到更好的分辨率要求  $\sigma$  与  $\varepsilon$  要趋于无穷小, 但根据 Heisenberg 测不准原理可知  $\varepsilon\sigma \geq \frac{1}{2}$ , 所以  $\varepsilon$  与  $\sigma$  不可能同时趋于无穷小, 这也导致了 Fourier 变换对于非平稳信号的处理无能为力。

法国工程师 J. Morlet 于 1984 年提出了小波变换的概念, 这是一种时间和频率的局域变换, 对于各种信号的处理具有重要意义<sup>[4]</sup>。

设函数  $\psi(t) \in L^1(R) \cap L^2(R)$ , 且有  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$ , 则  $\psi(t)$  称为基本小波。设  $a$  为尺度参数,  $b$  为时间参数, 连续小波函数为

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (4)$$

设  $x(t) \in L^2(R)$ ,  $\psi(t)$  为基本小波,  $x(t)$  的连续小波变换为

$$\text{WT}_x(a, \tau) = \langle x(t), \psi_{a,b}(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_R x(t) \psi^*\left(\frac{t-\tau}{a}\right) dt$$

小波变换相对于 Fourier 变换, 克服了窗口大小不随频率变化等缺点, 能够提供一个随频率改变的时间-频率窗口, 可以说小波变换是进行信号时频分析和处理的理想工具。

## 2 Mallat 变换法

### 2.1 Mallat 小波变换基础

小波是由  $L^2(R)$  的尺度函数  $\varphi(x)$  与小波函数  $\psi(x)$  共同平移而得。小波在变换之前要经过矩阵预滤波, 使小波更具整合性。之后将小波变换运用到信号中, 最后进行后滤波完成小波变换重构。

设  $H_k$  与  $G_k$  为  $r$  个小波的  $k$  个  $r \times r$  矩阵, 对小波进行滤波处理。

$\Phi(x) = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_r(x)\}^T$  为  $r$  小波的空间尺度函数矢量,  $\Psi(x) = \{\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_r(x)\}^T$  为  $r$  小波的空间小波函数矢量。 $\Phi(x)$  的整数平移与  $\Psi(x)$  的步进平移可构成  $L^2(R)$  的一组正交基, 则小波变换过程表述为

$$\Phi(x) = 2 \sum_k H_k \Phi(2x - k) \quad (5)$$

$$\Psi(x) = 2 \sum_k G_k \Psi(2x - k) \quad (6)$$

Mallat 变换中尺度函数可以理解为分解的低通滤波器系数, 小波系数可以理解为分解的高通滤波器系数。

### 2.2 Mallat 小波变换的信号消噪模型

小波变换可以看作是一个有限能的信号模型, 经过小波系数的叠加而重构的过程。对于一维离散信号来说, 经过一层小波变换可得到一级低频信号  $L_1$  与一级高频信号  $H_1$ , 一级低频信号  $L_1$  可分解为二级低频信号  $L_2$  与二级高频信号  $H_2$ ,  $L_2$  可分解为三级信号  $L_3$  与  $H_3$ , 这样不断进行的结果就是完成数据的塔式分解, 如图 1 所示。

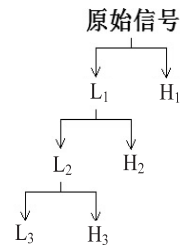
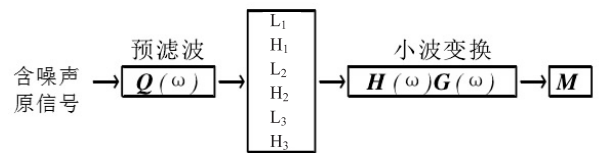


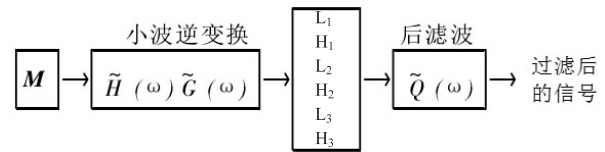
图 1 信号塔式分解

图 1 中的处理过程称为小波的两层分解, 小波分解只对低频信号进行分解, 对低频分解的越细致, 信号分辨率就越高。但随着信号的逐步细分, 对其处理的难度就会增加, 而效果却越发不明显。

经过塔式处理的信号就可以进入到分解与重构处理, 如图 2 所示, 分解与重构也是 Mallat 信号处理的核心。



(a) 小波分解



(b) 小波重构

图 2 小波的分解与重构示意图

在小波的分解与重构中, 信息量是保持不变的,  $H(\omega)$  与  $G(\omega)$  为小波滤波矩阵, 也称小波滤波器,  $\tilde{H}(\omega)$  以及  $\tilde{G}(\omega)$  称为小波逆滤波矩阵, 也称小波逆滤波器。 $\tilde{Q}(\omega)$  与  $Q(\omega)$  为小波逆滤波器<sup>[5]</sup>。

## 3 基于 SURF 阈值的 Mallat 变换法的改进

Mallat 小波变换的缺点是适用范围不是很广泛。它对于特定情况下已知噪声的频率范围且信号和噪声

的频带相互分离时非常有效。对实际应用中广泛存在的白噪声,其去噪效果则较差<sup>[6]</sup>。为了解决这个问题,应用 SURF 阈值法改进 Mallat 小波变换。

现实中的信号含有大量噪声,用  $N_i$  表示高斯白噪声,  $W_i$  表示加噪信号,  $S_i$  表示理想状态下不含噪声的信号,有  $W_i = S_i + \varepsilon N_i$ ,  $\varepsilon$  表示噪声强度控制因子,  $\varepsilon$  服从  $N(0, \sigma^2)$ 。

经过分化的小波在处理前需要确定 SURF 变换阈值,而在这之前要解决图像方差与噪声方差估计的问题,对于噪声方差  $\sigma_y^2$  有

$$\sigma_y^2(s, j) = \frac{1}{n^2(j)} \sum_{i,j=1}^{n(j)} N^2(i, j) \quad (7)$$

其中,  $N(i, j)$  服从高斯分布。

图像的方差为

$$\sigma_x(s, j) = \sqrt{\max(\sigma_y^2(s, j) - \sigma^2(s, j), 0)} \quad (8)$$

根据式(7)、(8)可得最佳阈值为

$$T(s, j) = \begin{cases} \frac{\sigma^2(s, j)}{\sigma_x(s, j)}, & \sigma_x(s, j) > 0 \\ \max(|N(s, j)|), & \sigma_x(s, j) \leq 0 \end{cases}$$

在确定阈值基础之上,需要设定小波分解层数。层数越高,变换对低频分解的越细致,信号分辨率也越高。但随着信号的逐步细分,对其处理的难度就会增加,而效果却越发不明显<sup>[7-8]</sup>。文中层数为3。

应用

$$\Phi(x) = 2 \sum_k \tilde{H}_k \Phi(2x - k) \quad (9)$$

$$\Psi(x) = 2 \sum_k \tilde{G}_k \Psi(2x - k) \quad (10)$$

进行小波重构,其中  $\tilde{H}_k$  以及  $\tilde{G}_k$  称为小波滤波矩阵。重构后就完成了小波的去噪处理。

用阈值法去噪的优点是噪声几乎完全得到抑制,且反映原始信号的特征尖峰点得到很好的保留<sup>[9]</sup>。

### 4 Mallat 改进法对信号处理的仿真分析

采用含高斯噪声的方波信号作为实验对象进行处理。含噪方波如图3所示。

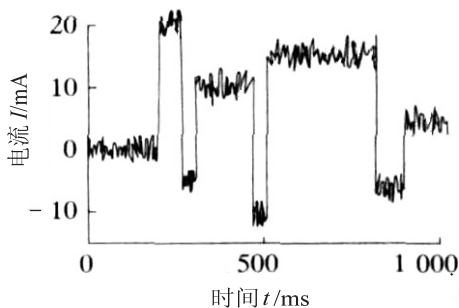


图3 含噪声信号方波

文中使用 Matlab 7.0 进行实验<sup>[10-11]</sup>,使用单一

Mallat 小波变换法,与 Mallat 改进法这两种方法对含噪声方波去噪的结果进行对比,如图4和图5所示。

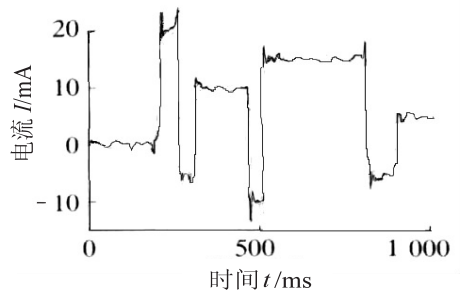


图4 Mallat 变换效果图

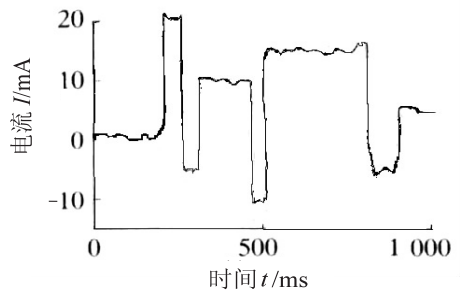


图5 改进 Mallat 变换效果图

通过图4与图5的对比,可以看出 Mallat 去噪后的信号虽然噪声有所衰减,但仍存在尖锐噪点的出现,白噪声现象仍然严重。但 Mallat 方法处理较为简单,且去噪速度很快,对于 Matlab 7.0 有很好的兼容性。

改进后的 Mallat 方法基于 SURF 阈值的过滤作用,信号中噪声得到很好的抑制,处理过的信号光滑,附加振荡现象几乎为零<sup>[12]</sup>,在同样保留处理效率和应用兼容性的同时,信号的去噪效果很好。

### 5 结束语

通过分析 Fourier 变换对信号处理的局限性体现出小波变换的优越性,解析了 Mallat 小波变换的原理和构建了 Mallat 对小波分解和重构的模型,并引入 SURF 阈值,改进了 Mallat 变换法。最终通过单一 Mallat 去噪和改进型 Mallat 去噪对含噪方波的处理实验,进行结果对比,验证改进方法可行。

#### 参考文献:

[1] Geronimo J, Hardin D P, Massopust P. Fractal functions and wavelet expansions based on several scaling functions [J]. Journal of approximation theory, 1994, 78(4): 373-401.  
 [2] 金宝龙,李 辉,赵乃杰,等.一种新的小波阈值去噪算法 [J]. 弹箭与制导学报, 2011, 31(1): 167-169.  
 [3] 刘宗昂,杨莘元,王丽安.一种新的小波去噪算法 [J]. 弹箭与制导学报, 2009, 29(1): 286-289.  
 [4] 张兆宁,董肖红,潘云峰.基于小波变换模极大值去噪方法

分类精度它可以达到很高的精度,但是对于少数类它的分类精度却很低,整体分类效果十分不好;DEC方法和欠抽样方法相比SVM分类器具有较高的性能,对于大部分的不平衡数据集,DEC方法明显地优于欠抽样方法,但是对于不平衡率较高的数据集以及haberman和transfusion这类不平衡率并不高的数据集,这两种方法仍然是有很低的Se,即少数类的分类精度不高,整体分类效果也不是很好;而US-DEC算法在7个不同数据集上都分别具有较高的Se和Sp,即相应的不平衡数据集的少数类分类精度可以达到比较高的值,整体分类性能也都要优于其他三种方法,说明该算法在提高少数类分类性能方面是有效的。

#### 4 结束语

文中提出的US-DEC算法,对于不平衡率较高的数据集,在数据预处理的过程中要随机把多数类划分成多个子集,这是需要一定的时间的,所以该算法需要花费的时间可能会多一些。另外,文中通过实验发现对于大部分的不平衡率不是很大的数据集,DEC方法都能够达到较高的少数类分类精度,但是对于haberman和transfusion这类不平衡率并不高的数据集,DEC方法却具有较低的少数类分类精度,然而,并不清楚DEC算法对于哪些不平衡率并不高的数据集它具有较低的性能,因此,探索这类不平衡数据集及其具体特征是文中下一步要研究的方向。

#### 参考文献:

- [1] Vapnik V N. The nature of statistical learning theory[M]. New York:Springer,2000.
- [2] Cortes C, Vapnik V. Support vector networks[M]. [s. l.]: [s. n.],1995.
- [3] 钱洪波,贺广南. 非平衡类数据分类概述[J]. 计算机工程与科学,2010,32(5):85-88.
- [4] He Haibo, Garcia E A. Learning from imbalanced data[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering,

2009,21(9):1263-1284.

- [5] 张琦,吴斌,王柏. 非平衡数据训练方法概述[J]. 计算机科学,2005,32(10):181-186.
- [6] 黄秀丽,王蔚. SVM在非平衡数据集中的应用[J]. 计算机技术与发展,2009,19(6):190-193.
- [7] 李刚. 代价敏感的支持向量机监督学习研究[D]. 南京:南京师范大学,2007.
- [8] Veropoulos K, Campbell C, Cristianini N. Controlling the sensitivity of support vector machines[C]//Proceedings of international joint conference on AI. [s. l.]: [s. n.],1999:55-60.
- [9] 王和勇,樊泓坤,姚正安. SMOTE和Biased-SVM相结合的不平衡数据分类方法[J]. 计算机科学,2008,35(5):174-176.
- [10] Chawla N V, Bowyer K W, Hall L O, et al. SMOTE: Synthetic minority over-sampling technique[J]. Journal of Artificial Intelligence Research,2002,16(1):321-357.
- [11] Kubat M, Holte R, Matwin S. Addressing the curse of imbalanced training sets: One-sided selection[C]//Proceedings of the 14th international conference on machine learning. San Francisco: Morgan Kaufmann,1997:179-186.
- [12] Liu X Y, Zhou Z H. Exploratory undersampling for class imbalance learning[C]//Proc of 6th IEEE international conference on data mining. Hong Kong: [s. n.],2006:965-969.
- [13] Drummond C, Holte R C. Class imbalance and cost sensitivity: Why undersampling beats oversampling[C]//Proceedings of the workshop on learning from imbalanced data sets. San Mateo: Morgan Kaufmann Publishers,2003.
- [14] 刘海涛,黄敏,朱启兵,等. 基于支持向量机的不平衡数据分类算法的研究[J]. 计算机应用研究,2009,26(8):2874-2875.
- [15] 杨智明,彭宇,彭喜元. 基于支持向量机的不平衡数据集分类方法研究[J]. 仪器仪表学报,2009,30(5):1094-1099.
- [16] Batuwita R, Palade V. FSVM-CIL: Fuzzy support vector machines for class imbalanced learning[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems,2010,18(3):558-571.

(上接第109页)

- 的改进[J]. 电力系统及其自动化学报,2005,17(2):9-12.
- [5] 郑海波,陈心昭,李志远. 基于小波包变换的一种降噪算法[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版),2001,24(4):459-462.
- [6] Bui T D, Chen G. Translation invariant denoising using multi-wavelets[J]. IEEE trans on SP,1998,46(12):3414-3420.
- [7] 彭玉华. 小波变换与工程应用[M]. 北京:科学出版社,1999:59-62.
- [8] 韩震宇,申旭娟. 信号的多分辨率分析及其在消噪中的应

用[J]. 四川联合大学学报:工程科学版,1999,3(1):52-58.

- [9] Mallat S, Hwang W L. Singularity detection and processing with wavelets[J]. IEEE transaction on information theory,1992,38(2):617-643.
- [10] 李祥兵,肖合林. 基于Matlab的小波阈值折衷去噪算法研究[J]. 电脑开发与应用,2009,22(6):4-6.
- [11] 吴伟,蔡培升. 基于MATLAB的小波去噪仿真[J]. 信息与电子工程,2008,6(3):220-223.
- [12] Goodman T N T, Lee S L. Wavelets of multiplicity[J]. Trans of Amer Math Soc,1994,342(1):307-324.

# 基于阈值的Mallat变换法的设计与仿真

作者: [李圣普](#), [王小辉](#), [时合生](#), [LI Sheng-pu](#), [WANG Xiao-hui](#), [SHI He-sheng](#)  
作者单位: [平顶山学院 计算机科学与技术学院, 河南 平顶山, 467002](#)  
刊名: [计算机技术与发展](#)

---

ISTIC

英文刊名: [Computer Technology and Development](#)

---

年, 卷(期): 2014(4)

本文链接: [http://d.wanfangdata.com.cn/Periodical\\_wjfz201404027.aspx](http://d.wanfangdata.com.cn/Periodical_wjfz201404027.aspx)