定流值比例的最小双费用流算法研究

赵礼峰,刘艳清
(南京邮电大学 理学院,江苏 南京 210003)

摘　要:现有最小双费用流算法只能求解网络的最大双流问题,并不能得到定流值比例。为此,提出了一种定流值比例的最小双费用流新算法,在求解最小双流和最小费用的基础上,在调整双流值保证定流值比例的同时得到最小费用流。所提出的新算法定义了余网络和费用差,以邻接矩阵为网络数据存储结构,使用 Ford 算法分别得到两费用的最短增广链,选择费用最小的增广链增广并求出其对应的费用差,从费用差最小的开始调整流值就得到定流值比例下的最小费用。应用该新算法构建定流值比例的最小双费用流算法的运输网络模型,就可以获得最优运输方案。逻辑推理和仿真实验结果均表明,所提出的算法可行、有效,能较好地解决稀疏网络以及复杂网络中定流值比例的最小双费用流问题。

关键词:最小双费用流算法;余网络;邻接矩阵;Ford 算法;费用差
中图分类号:TP301.6　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1673-629X(2017)04-0094-04
doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2017.04.021

Investigation on Minimum Double Cost Flow Algorithm with Constant Value Ratio

ZHAO Li-feng,LIU Yan-qing
(College of Mathematics and Physics,Nanjing University of Posts and Telecommunication,
Nanjing 210003,China)

Abstract:The minimum double cost flow algorithm can only get the maximum double flow of the network,but it cannot get the required flow value ratio. So,a new algorithm of the minimum double cost flow with constant value ratio is put forward. It adjusts the double value to get the constant value ratio and make the cost least based on the maximal double value and minimal cost has gotten. The algorithm defines the over network and cost difference in it,with adjacency matrix as the network data storage structure,and it uses Ford algorithm to obtain shortest augmenting chain for two expenses and chooses the minimum cost augmented links to get the cost difference of augmented chain. It adjusts the double flow ratio based on the size of the cost difference. The algorithm is used to build the transportation network model of minimum double cost flow of constant flow ratio to get the optimal transportation scheme about the model. The logical reasoning and simulation results show that the algorithm proposed is completely feasible and effective,and it can effectively solve the problem of minimum double cost flow in sparse network and complex network.

Key words:minimum double cost flow algorithm;over network;adjacency matrix;Ford algorithm;cost difference

0　引　言

最小双费用流问题是网络优化中的一个核心问题,许多网络优化问题都可归结为最小双费用流问题的特例,如最短路[1-2]、最大流[3-5]以及最小费用最大流[6-8]问题,这些网络优化问题都可归为单可行流算法研究。随着物流运输的发展,这些单可行流算法研究已经满足不了运输行业不断发展的需要。由此,谢政和汤泽滢根据一个实例建立了在容量—费用双流网络中求最小费用最大双流的模型[9],提出了最小费用最大双流和双流增量网络的充要条件,该算法证明了最小费用最大双流算法的正确性。谢政和肖予钦提出了在 (v_s,v_t) 平面双流网络中的最小费用最大双流[10],利用 (v_s,v_t) 平面双流网络的平面性,找出并证明了该网络中最小费用双流的充要条件,该算法更易于在计算机上实现。马宇斌、谢政等提出了一种求解最小双费用流问题的算法[11],通过实际应用案例,抽

收稿日期:2016-04-24　　**修回日期**:2016-08-17　　**网络出版时间**:2017-03-07
基金项目:国家自然科学基金资助项目(61304169)
作者简介:赵礼峰(1959-),男,教授,硕士研究生导师,研究方向为图论及其应用、矩阵论等;刘艳清(1989-),女,硕士研究生,研究方向为最短路、最大流以及最小双费用流等。
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20170307.0920.006.html

象出一种带容量限制的双费用权网络模型,并由此提出了相应的最小双费用流问题。借鉴网络分层的思想,根据双费用权网络的特点,设计出一个求解该问题的双层原始对偶算法。文献[9-11]都是关于双可行流的算法研究,这些算法很好地解决了单可行流算法解决不了的问题。但是对运输的两种产品有定运输比例要求时,以上三种双费用流算法明显就不再适用,由此在文献[9-11]的理论基础上,提出了一种定流值比例的最小双费用流算法。

在文献[9-11]中得到了网络中的最大双流,由于每次都选择费用最小的增广链增广流值,这就造成了得到的比值往往不是两流值的定流值比例。可以通过调整双流的流值得到定流值比例,而每调整一个单位可行流,总费用就会增加,为此产生了如何调整双流的比值才能使其总费用最小,每调整一个流值总费用会增加多少的问题。新算法是在求得的最大双流和最小费用的基础上,每得到一个增广链增广流值时,求出其对应的费用差。每调整一个流值,总费用就增加对应的费用差的值,所以从费用差最小的开始调整流值就能实现既得到要求的流值比例又使得费用最少。通过模型建立与求解以及仿真实验表明,新算法具有完全的可行性和有效性。

1　基本概念

定义 1(容量 - 费用双流网络)[9]:设 $N=(V,A,c,w_1,w_2)$ 是一个带始点和终点的容量网络,每条弧的容量为 c_{ij},两个费用权为 w_{ij}^1 和 w_{ij}^2,其中 w_{ij}^1 表示相应弧流出一个单位的第一种流的费用,w_{ij}^2 表示相应弧流出一个单位的第二种流的费用。

定义 2(定流值比例的最小双费用流算法):在给定的容量-费用双流网络 $N=(V,A,c,w_1,w_2,\theta)$ 中,对于任意一条弧 $a_{ij}=(v_i,v_j)\in A$,都赋给容量 $c_{ij}\geqslant 0$,θ 为流值的比例,费用权 $w_{ij}^1\geqslant 0$ 和 $w_{ij}^2\geqslant 0$。记为 $F=\{(f_1,f_2)/(f_1,f_2)$ 是 N 的最大双流$\}$,在 F 中找到一个最大双流 $(f_1^*,f_2^*)\in F$ 且 $\theta=\dfrac{f_1^*}{f_2^*}$,使其费用 $w_1(f_1^{\ *})+w_2(f_2^*)=\min\{w_1(f_1)+w_2(f_2)/(f_1,f_2)\in F\}$,则称 (f_1^*,f_2^*) 为 N 上关于 (w_1,w_2) 定流值比例的最小双费用流算法。

定义 3(余网络)[9]:设 f 是 N 上一个单可行流,按如下规则修改网络 N:对于 N 中任意一条弧 $a_{ij}=(v_i,v_j)\in A$,若 $f_{ij}=c_{ij}$,则删掉弧 a_{ij};若 $0<f_{ij}<c_{ij}$,则置 $c_{ij}=c_{ij}-f_{ij}$;若 $f_{ij}=0$,则弧 a_{ij} 及其容量 c_{ij} 都不变。称修改后所得的网络为 N 关于 f 的余网络,并记为 $N\backslash f$。

定义 4(邻接矩阵)[12-13]:为了便于计算机来存储网络,计算网络中有比例要求的最大双流和最小费用,可以采用三个二维数组来表示网络 $N=(V,A,c,w_1,w_2)$ 中的容量 c、费用 w_1 以及费用 w_2。一个是用于存储网络中弧的最大容量的权函数,另两个分别用来存放网络中弧的两种费用的权函数,这三个数组被称为邻接矩阵。设一个有 n 个顶点的有向网络,它的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}_0[i,j]$ 具有如下性质:

$$\boldsymbol{A}_0[i,j]=\begin{cases}w_{ij} & \text{若 } a_{ij}=(i,j)\in A\\ 0 & \text{反之}\end{cases}$$

其中,$\boldsymbol{A}_0[i,j]>0$,表示网络中节点 i 和节点 j 邻接;数值 w_{ij} 表示对应弧的权函数。

定义 5(费用差):设 p 是一条从源点到汇点的增广路径,$w_1(p)$ 和 $w_2(p)$ 分别是两种物品从源点到汇点在 p 上的费用,则费用差为 $\boldsymbol{\omega}=|w_1(p)-w_2(p)|$。

2　定流值比例的最小双费用流算法

2.1　算法思想

新算法主要是在求得的最大双流和最小费用的基础上,通过调整双流的值既得到要求的流值比例,又使得费用最少。首先使用 Ford 算法分别求出两费用的最短增广链,比较、选择费用最小的增广链增广流值并求出增广链的费用差,再构建余网络,重复以上步骤直至找不到增广链为止。其次当得到的最大双流不是要求的流值比 θ 时,如 $\dfrac{f_1}{f_2}>\theta$,从 f_1 向 f_2 调整流值,由于求得的最大双流的费用是最小的,每调整一个流值,总费用都相应增加,每调整一个单位可行流,总费用就会增加一个单位费用差的费用,而从费用差最小的开始调整总费用也会增加最少,因此得到的就是有比例要求的最大双流以及最小费用。

2.2　算法步骤

设 $N=(V,A,c,w_1,w_2,\theta)$ 是一个容量 - 费用双流网络,其中 $c_{ij}\geqslant 0,w_{ij}^1\geqslant 0,w_{ij}^2\geqslant 0,0<\theta\leqslant 1$。

Step1:令 $f_1=0,f_2=0$。

Step2:构造余网络 $D(f_1,f_2)$,若 $D(f_1,f_2)$ 中不存在关于费用 w_1 和 w_2 的 (v_s,v_t) 路,转 Step4,否则,在 $D(f_1,f_2)$ 中用 Ford 算法找一条关于 w_1 的最小费用路 s_1 和关于 w_2 的最小费用路 s_2,$\boldsymbol{\sigma}_i$ 是 s_i 的容量 $(i=1,2)$。

Step3:当 $w_1(s_1)\leqslant w_2(s_2)$ 时,沿路 s_1 对 f_1 增广流值 $\boldsymbol{\sigma}_1$,得到新可行流仍记为 f_1,转 Step1;当 $w_1(s_1)\geqslant w_2(s_2)$ 时,沿路 s_2 对 f_2 增广流值 $\boldsymbol{\sigma}_2$,得到新可行流仍记为 f_2,转 Step2。

Step4:当所求出的 f_1 和 f_2 的流值比是所要求的,结束。当所求的 f_1 和 f_2 的值不符合所求的流值比,当

$\frac{f_1}{f_2} > \theta$ 时,在 f_1 增广路径中 $p_1, p_2, \cdots, p_i$ 中,求出费用 $w_1(p_1)$ 和费用 $w_2(p_1)$ 的费用差 δ_1,费用 $w_1(p_2)$ 和费用 $w_2(p_2)$ 的费用差 δ_2,以及 δ_3 直到 δ_i,从费用差最小的增广流向 f_2 调整流值,直到 $\frac{f_1}{f_2} = \theta$;当 $\frac{f_1}{f_2} < \theta$ 时亦是如此,从而得到要求的流值比,结束。

2.3 算法的可行性分析

该算法执行时,每找到一条增广链增广流值,会重新构造余网络,在余网络中继续寻找增广链直至找不到增广链为止。由于先前对于余网络的定义是对于 N 中任意一条弧 $a_{ij} = (v_i, v_j) \in A$,若 $f_{ij} = c_{ij}$,则删掉弧 a_{ij};若 $0 < f_{ij} < c_{ij}$,则置 $c_{ij} = c_{ij} - f_{ij}$;若 $f_{ij} = 0$,则弧 a_{ij} 及其容量 c_{ij} 都不变。所以每次增广链增值后在重新构建的余网络中是被删掉的,设网络 N 的最大双流为 v^*,每次增广的流值最少为 1,因此最多经过 v^* 次增广,此时算法结束,得到定流值比例的最小双费用流,算法不会陷入死循环。

2.4 算法的时间复杂度

设 N 的顶点数为 n,有向弧数为 m,v^* 为最大双流的流值,并且假设 N 中所有弧容量以及 v^* 均为整数,在算法执行过程中,每次增广的流值最多为 1,因此最多经过 v^* 次增广,所以 Step2 到 Step3 的循环次数不超过 v^*。Ford 算法的复杂性为 $O(nm)$,在 Step2 中需要分别求出两费用的最短路,所以 Step2 的复杂性为 $O(2nm)$,Step3 沿最小费用路对流进行增广的计算量为 $O(n)$。Step4 调整流值最大为 v^*,最多调整 v^* 次。由此可知,定流值比例的最小双费用流算法的复杂性为 $O(2nmv^*)$。

3 算法验证

3.1 建立网络模型

某企业想要将两种不同的产品从产地运往仓库,运输过程是通过一个单行的公路网,公路网中有若干条运输路线可供选择,每条道路只能负担有限重量的产品,不同的道路上单位产品的运费也不同,在同一条道路上,不同产品的运费也不同。那么给出一个模型使得该企业从产地运往两种不同产品到仓库且两种产品的运输比例为 θ 的方案,使得运输量最多而总费用最小。不妨假设图 1 为这个运输网络的一部分,运输网络有 10 个节点,为图中圈起来的数字,每一条弧上第一个数字为每条运输道路的最大负担重量,第二个数字为第一种产品在每条运输道路的运费,第三个数字为第二种产品在每条运输道路的运费。

若将此运输系统看作是一个从始点(产地)为节点 1,终点(仓库)为节点 10 的容量网络 $N = (V, A, c, w_1, w_2, \theta)$,其中,$V$ 表示节点 1 和节点 10 之间的两条或者两条以上道路的交汇点,A 表示弧的集合,c 表示每条运输道路的最大负担重量,w_1 和 w_2 分别表示第一种产品和第二种产品在每条道路运费的集合,θ 表示两种产品的运输比值。

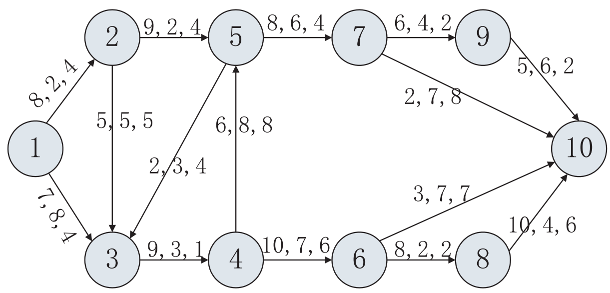

图 1 运输网络

于是上述问题归结为:求容量网络 $N = (V, A, c, w_1, w_2, \theta)$ 的定流值比例的最小双费用流算法。

3.2 求解网络模型

用编制的 MATLAB 程序求出图 1 两流值比例为 1∶2的最小双费用流,如表 1 所示。其中,序号 1~5 表示有五条路径,增广路径中列出从节点 1 到节点 10 的所有增广路径,f_1 为费用 1 在每条增广路径的增广流值,f_2 为费用2 在每条增广路径的增广流值,$w_1(s_1)$ 和 $w_2(s_2)$ 分别表示每一条增广路径关于费用 1 和费用2 的费用,费用差 ω 是 $w_1(s_1)$ 和 $w_2(s_2)$ 的差的绝对值,w 是图 1 中的最小费用。从表中可以看到,两流值的比例为 1∶2,最小费用为 275。

表 1 网络 1 中流值比为 1∶2 的最小双费用流

序号	增广路径	f_1	f_2	$w_1(s_1)$	$w_2(s_2)$	ω	w
1	$1\to2\to3\to4\to6\to8\to10$	1	0	23	24	1	
2	$1\to2\to5\to7\to10$	2	0	17	20	3	
3	$1\to2\to5\to7\to9\to10$	2	3	20	16	4	275
4	$1\to3\to4\to6\to8\to10$	0	4	24	19	5	
5	$1\to3\to4\to6\to10$	0	3	25	18	7	

表 2 网络 1 中流值比为 1∶1 的最小双费用流

序号	增广路径	f_1	f_2	$w_1(s_1)$	$w_2(s_2)$	ω	w
1	$1\to2\to3\to4\to6\to8\to10$	1	0	23	24	1	
2	$1\to2\to5\to7\to10$	2	0	17	20	3	
3	$1\to2\to5\to7\to9\to10$	4.5	0.5	20	16	4	285
4	$1\to3\to4\to6\to8\to10$	0	4	24	19	5	
5	$1\to3\to4\to6\to10$	0	3	25	18	7	

当需要的两流值比例为 1∶1,也就是说最大双流为(7.5,7.5)时,需要从 f_2 调整 2.5 个单位可行流到 f_1,序号 3、4 以及 5 是 f_2 的增广路径,每从 f_2 调整一个单位可行流到 f_1,总费用就会增加一个单位费用差的值,所以从费用差最小的 4 开始调整,调整 2.5 个单位的可行流如表 2 所示。最小费用 w 在 275 的基础上增加 10 为 285。用编制的 MATLAB 程序检验得到的结

果和表 2 相同。

3.3　新算法在稀疏网络中的运行时间

生成规模为 $n*n$ 的随机稀疏网络,每条弧的流值、费用 1 以及费用 2 都是随机生成的整数。为了减少计算机稳定性造成的误差,以下所有实验都进行 10 次仿真并取平均值。

当网络的节点规模为 500,流值比值设置为 1 ∶ 2 时的运行时间如图 2 所示。

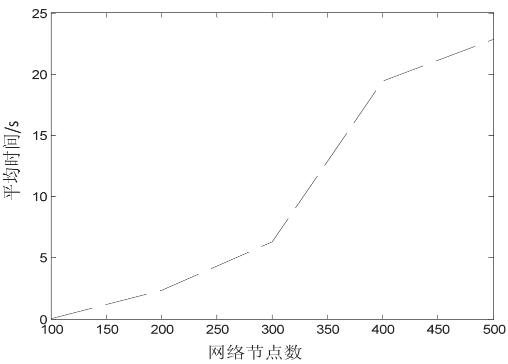

图 2　流值比例为 1 ∶ 2 的稀疏网络平均运行时间(1)

从图中可以得到,平均运行时间随着节点数的增大而增大。对于节点规模为 1 000,流值比值设置为 1 ∶ 2 的网络来说,由于新算法的时间复杂性为 $O(2nmv^*)$,随着节点数、弧的个数以及总流值的增大运行时间呈次方增长,所以从图 3 可以看到,节点数从 500 增加到 1 000 时运行时间直线上升。大量的仿真实验结果表明,算法对于网络规模为 500 个节点的运行时间比较稳定,当网络规模超过 500 个节点时运行时间呈次方增长,运行时间稍长。

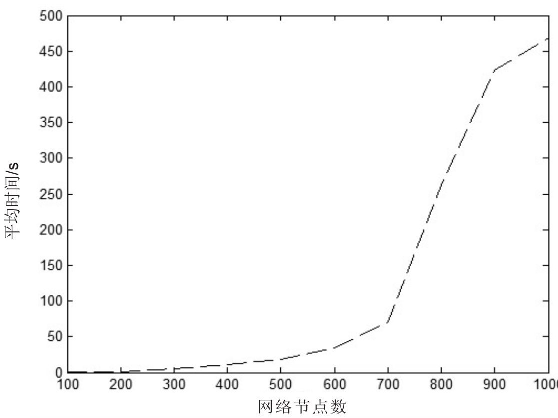

图 3　流值比例为 1 ∶ 2 的稀疏网络平均运行时间(2)

3.4　新算法在复杂网络中的运行时间

生成规模为 $n*n$ 的随机网络,用 round(10 * rand(n))生成的随机矩阵来构成随机网络,发现 round(10 * rand(n))生成的矩阵中每个节点平均与 $n-2$ 个节点相连,每条弧的流值、费用 1 以及费用 2 都是随机生成的整数,为了减少计算机稳定性造成的误差,以下所有实验都进行 10 次仿真并取平均值。

当网络的节点规模为 500,流值比值设置为 1 ∶ 2 时的运行时间如图 4 所示。当节点规模为 350 时,运行时间开始直线上升,这是由于算法的时间复杂度为 $O(2nmv^*)$,网络中每个节点至少与 $n-2$ 个节点相连,那么弧的个数 $m=(n-2)!$,所以随着节点数的增加,运行时间快速增加。

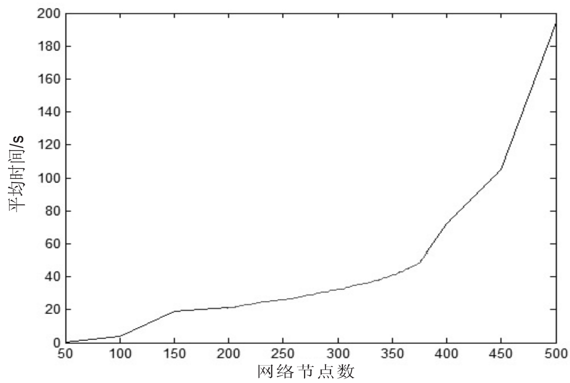

图 4　流值比例为 1 ∶ 2 的复杂网络平均运行时间

通过图 2 到图 4,比较和分析新算法在稀疏网络以及复杂网络运行时间的长短,表明新算法更适合执行较大规模的稀疏网络,对于较小规模的较复杂网络也很适用。

4　结束语

运输问题一直是网络最优化的重要研究方向,在运输如此发达的今天,急需提高运输物品的量同时降低运输成本。为此,提出了一种定流值比例的最小双费用流新算法,在构建余网络下求得网络中的最小双费用流,在求解最小双流和最小费用的基础上,通过调整双流值保证定流值比例的同时得到最小费用流算法。用 MATLAB 编制的程序能直接求出定流值比例,对于两种商品运输问题有很大的研究意义。大量的仿真实验表明,算法对于稀疏网络规模为 500 个节点的运行时间比较稳定,当网络规模超过 500 个节点时运行时间呈次方增长,运行时间稍长;对于复杂网络,当节点规模为 350 时运行时间上升稍快。目前随着网络规模的不断增大,网络规模趋于复杂化,而新算法经过逻辑推理以及仿真实验,证明了其能求出稀疏网络以及复杂网络的固定流值比以及最小费用,具有较高的应用价值。

参考文献:

[1] Cai X, Kloks T, Wong C K. Time-varying shortest path with constraints[J]. Networks, 1997, 29(2): 141-149.

[2] Loachim I. A dual programming algorithm for the shortest path problem[J]. Networks, 1998, 31(2): 192-204.

[3] Dinic E A. Algorithms for solution of a problem of maximum

(下转第 103 页)

要最快的线路,那么可以为他推荐线路 1(最短路线路);若该自驾游车主希望在旅行中经过石家庄市办事,可以为他推荐线路 2(次短路线路);若该自驾游车主同时游览超过 5 个省,可以为他推荐线路 3(渐次短路线路)。

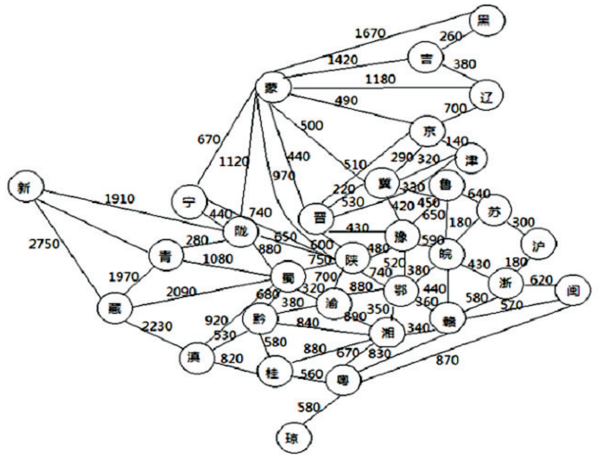

图 2　省间距离图

表 2　具体行程表

线路	途经省、市	总路程/km
1(最短路)	内蒙古呼和浩特市、甘肃省兰州市	3 520
2(次短路)	河北省石家庄市、内蒙古呼和浩特市、甘肃省兰州市	3 820
3(渐次短路)	河北省石家庄市、山西省太原市、内蒙古呼和浩特市、甘肃省兰州市	3 980

6　结束语

针对传统算法只能解决一条最短路的局限性,提出了一种通过距离矩阵的迭代操作和路径矩阵的替换操作得出前 K 条短路径的算法。该算法利用矩阵进行记录和计算,一定程度上简化了仿真的复杂性。在理论分析的基础上,进行了相关实例仿真计算,以验证该算法的有效性和可行性。理论分析及仿真验证结果表明,该算法基于 Matlab 平台对于包括生活中旅行线路选择问题在内的大型复杂网络求解具有较好的实用性。

参考文献:

[1]　谢　政. 网络算法与复杂性理论[M]. 长沙:国防科技大学出版社,2003.

[2]　刘焕淋,陈　勇. 通信网图论及应用[M]. 北京:人民邮电出版社,2010.

[3]　Eppstein D. Finding the k shortest paths[J]. SIAM Journal of Computing,1998,28:652-673.

[4]　陈文兰,潘荫荣. 一个求解次短和渐次短路径的实用算法[J]. 计算机应用与软件,2006,23(1):94-96.

[5]　Yen J Y. Finding the k shortest loopless paths in a network[J]. Management Science,1971,17(11):712-716.

[6]　赵　见. 求解无环 K 短路径的 Dijkstra 算法[J]. 淮阴师范学院学报:自然科学版,2012,11(1):8-12.

[7]　柴登峰,张登荣. 前 N 条最短路径问题的算法及应用[J]. 浙江大学学报:工学版,2002,36(5):531-534.

[8]　牛新奇,潘荫荣,胡幼华. K(≤3)条渐次短路径搜索算法的研究[J]. 计算机工程与应用,2005,41(22):51-53.

[9]　王文宁. 基于优化的 Floyed 算法前 r 条最短路径的实现[J]. 常州工学院学报,2009,22(5):28-30.

[10]　Hoffman W,Pavley R. A method of solution of the Nth best path problem[J]. Journal of the ACM,1959,6(4):506-514.

[11]　Katoh N,Ibaraki T,Mine H. An efficient algorithm for k shortest simple paths[J]. Networks,1982(12):411-427.

[12]　高　松,陆　锋. K 则最短路径算法效率与精度评估[J]. 中国图象图形学报,2009,14(8):1677-1683.

[13]　张国伍,钱大琳. 公共交通线路网多条最短路径算法[J]. 系统工程理论与实践,1992,23(4):22-26.

[14]　刘卫国. MATLAB 程序设计与应用[M]. 北京:高等教育出版社,2006.

(上接第 97 页)

flow in networks with power estimation[J]. Soviet Mathematical Doklady,1970,11(8):1277-1280.

[4]　谢金星,邢文训,王振波. 网络优化[M]. 北京:清华大学出版社,2009:177-181.

[5]　Ford L R,Fulderson D R. A simple algorithm for finding maximal network flows and an application to Hitchcock problem[J]. Canadian Journal of Mathematics,1957,9:210-218.

[6]　Hamacher H W,Pedersen C R,Ruzika S. Multiple objective minimum cost flow problems[J]. European Journal of Operational Research,2007,176(3):1404-1422.

[7]　Zhu Xiaoyuan,Yuan Qi. Minimal-cost network flow problems with variable lower bounds on arc flows[J]. Computers & Operations Research,2011,38(8):1210-1218.

[8]　赵礼峰,宋常城,白　睿. 基于最小费用最大流问题的“排序”算法[J]. 计算机技术与发展,2011,21(12):82-85.

[9]　谢　政,汤泽滢. 最小费用最大双流[J]. 高校应用数学学报,1996,11(1):97-104.

[10]　谢　政,肖予钦. (v_s,v_t) 平面双流网络中的最小费用最大双流[J]. 数学理论与应用,1999,19(3):112-116.

[11]　马宇斌,谢　政,陈　挚. 一种求解最小双费用流问题的算法[J]. 计算机工程与科学,2014,36(3):446-451.

[12]　库向阳. 点和边有容量约束的网络最小费用最大流算法[J]. 计算机应用研究,2010,27(8):3112-3114.

[13]　谢　政. 网络算法与复杂性理论[M]. 北京:国防科技大学出版社,2003.