

基于 n 值关系语义的命题模态逻辑系统研究

周张泉¹, 杨成彪², 刘 军³

(1. 陆军工程大学 指挥控制工程学院, 江苏 南京 210000;

2. 东南大学 计算机科学与工程学院, 江苏 南京 210000;

3. 南京审计大学金审学院 信息科学与工程学院, 江苏 南京 210000)

摘要: 传统的多值模态逻辑系统将关系语义中的状态及状态间的关系进行了多值化处理。然而, 实际应用中状态间的关系往往是确定的, 无需多值化。针对这种情况, 基于 Łukasiewicz 代数系统提出了一种新的命题模态逻辑 n 值关系语义。在所提出的 n 值关系语义中, 针对状态进行了多值化处理, 同时保持了状态间关系的确定性。通过对逻辑公式的形式化定义以及可满足性和有效性的分析, 证明了 n 值关系语义下经典命题模态逻辑系统 K , T , $S4$ 和 $S5$ 的正确性。进一步地, 给出了极大一致集与典范模型在 n 值关系语义下的定义, 并完成了上述经典命题模态逻辑系统的完备性证明。上述结论表明基于 n 值关系语义的命题模态逻辑系统能够涵盖并捕捉到经典逻辑系统中的所有有效命题。综上所述, 所提出的基于 Łukasiewicz 代数系统的 n 值关系语义提供了一种在实际应用中处理多值状态及确定的状态间关系的方法。这种方法在扩展命题模态逻辑系统的形式化定义与关系语义是可行且有效的。

关键词: 模态逻辑; 多值逻辑; 关系语义; Łukasiewicz 系统; 正确性和完备性

中图分类号: TP301.2

文献标识码: A

文章编号: 1673-629X(2024)02-0071-07

doi: 10.3969/j.issn.1673-629X.2024.02.011

Research on a Propositional Modal Logic System Based on n -Valued Relational Semantics

ZHOU Zhang-quan¹, YANG Cheng-biao², LIU Jun³

(1. School of Command and Control Engineering, Army Engineering University of PLA, Nanjing 210000, China;

2. School of Computer Science and Engineering, Southeast University, Nanjing 210000, China;

3. School of Information Science and Engineering, Nanjing Audit University Jinshen College, Nanjing 210000, China)

Abstract: Traditional multi-valued modal logic systems are established by mapping both of states and relations to multi-valued spaces in terms of their relational semantics. However, in practical applications, the relations between states are often deterministic and do not require multi-valuation. To address this issue, a new kind of n -valued relational semantics for propositional modal logic, based on Łukasiewicz algebra system, has been proposed. In the proposed n -valued relational semantics, states are treated with multi-valuation while maintaining the determinism of relations between states. By formalizing the logical formulas and analyzing their satisfiability and validity, the correctness of the classical propositional modal logic systems K , T , $S4$, and $S5$ under the n -valued relational semantics has been demonstrated. Furthermore, the definitions of maximal uniform sets and canonical models have been provided under the n -valued relational semantics, along with the completeness proofs of the aforementioned classical propositional modal logic systems. This implies that the propositional modal logic system based on n -valued relational semantics can cover and capture all valid propositions in these classical systems. In conclusion, the n -valued relational semantics based on Łukasiewicz algebra system offers a method to handle deterministic relations between multi-valued states in practical applications. This method has shown feasibility and effectiveness in expanding the formal definition and relational semantics of propositional modal logic systems.

Key words: modal logic; multi-valued logic; relational semantics; Łukasiewicz system; correctness and completeness

0 引言

模态逻辑作为形式化的逻辑语言工具被广泛应用

于计算机科学诸多理论和应用中^[1], 比如软硬件的可靠性模型检测^[2-3]、计算复杂性理论^[4-5]、数据库理

收稿日期: 2023-03-28

修回日期: 2023-07-28

基金项目: 江苏省高等学校基础科学(自然科学)研究面上项目 A 类(22KJB520003)

作者简介: 周张泉(1988-), 男, 博士, 通信作者, 研究方向为模态逻辑和计算复杂性; 刘 军(1969-), 男, 教授, 研究方向为数理逻辑和密码学。

论^[6]、知识表示与推理^[7]、量子计算^[8]等。近年来,模态逻辑越来越多地被研究如何结合神经方式以提升学习模型的可解释性及逻辑推理能力^[9-10]。通过引入模态词,模态逻辑具有部分二阶逻辑的表达能力,同时能够保持形式上的简洁性以及较低的计算复杂度^[1,11]。研究者基于不同的模态词,发展除了不同的模态逻辑系统,如动态逻辑^[12-13]、时序逻辑^[14]等。经典的模态逻辑仍旧属于二值逻辑,这使得其在一些常见的应用场景中存在局限性,比如针对知识图谱中分级概念(graded concepts)的推理^[15-16](如概念“深红色的花”)、多 Agent 协同任务^[17]等。这些场景要求逻辑语言能够描述对象某一性质的程度(如“深红色”中“深”的程度),或者 Agent 进行某项决策或行动的可能性。为使得模态逻辑具备上述能力,可建立多值逻辑系统,从而对模态公式的分级程度或可能性进行推理和计算。另外,多值逻辑系统也能更直观地映射到神经方式下的学习模型^[18]。

在建立多值逻辑系统方面已有不少研究。早期研究者通过人为指派的方式确定逻辑公式的真值程度^[19](又称为真度),然而给全体命题指派真度可行性较低。为解决此问题,诸多研究将全体命题映射为模糊集进行处理,从而提出模糊逻辑的概念^[20](fuzzy logic)。模糊逻辑建立了较完整的多值逻辑研究框架,通过将语义模型映射到多值系统以实现多值语义。但该方法容易导致公式真度的弱化,比如重言式和矛盾式的真假是显而易见的,但基于该方法需要做更多假设或处理才能保证。国内学者在逻辑公式真度的建模上也进行了深入的研究^[21-25],通过全体命题的真值下界确定命题真度,并将数值计算引入到真度的赋值计算中,建立了计量逻辑学的概念。此种方法更多地考察命题真度的赋值方法,以及如何诱导出复杂公式的真度,但并未从逻辑层面深入探索推理过程在多值语义下是否保持相应的性质,即原有公理系统及推理规则在多值语义下的正确性和完备性。另外,不少工作引入 Łukasiewicz 代数系统以建立多值逻辑系统^[20,26-27]。Łukasiewicz 代数系统具有取值有限性的特点且可以进行任意的 n 值扩张,相较于复杂代数系统下的计量逻辑在建模难易性与计算效率上具有优势。该方法也被用于建立多值模态逻辑^[28-29]。具体而言,给出模态公式在语义模型状态上的真度,同时针对状态间的关系也进行了多值化处理。然而,该方法易导致计算效率较低,且公式的可满足性及有效性并不清晰。在实际应用中,状态间的关系往往是明确的,比如知识图谱中对象或事件的关系、Agent 系统中的状态转移关系等。这意味着状态间的可能性及程度信息可以通过公式进行传递,而不需要针对状态间的关

系另作多值化处理。这进一步使得公式的可满足性及有效性也能得到更清晰的定义。

下文基于 Łukasiewicz 代数系统给出一种新的 n 值命题模态逻辑。不同于文献[28-29],该文从实际应用角度出发,针对关系语义中的状态进行多值化处理,同时保持状态间关系的确定性,以此重新定义 n 值关系语义。在此定义下,需进一步考察传统命题模态逻辑系统的正确性和完备性。为达此目的,该文给出 n 值命题模态逻辑公式的形式化定义及其可满足性、有效性;给出 n 值关系语义下的极大一致集与典范模型的定义;基于上述理论工具完成了经典模态逻辑系统 $K, T, S4$ 和 $S5$ 在 n 值关系语义下正确性和完备性的证明。所建立的 n 值命题模态逻辑可直接支撑需多值化处理的实际应用场景,同时保证推理结果的正确性和完备性。

1 预备知识

记 $L_n = \{0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$ ($n \geq 2$)。给定任意的 $x, y \in L_n$, 定义如下运算:

- (1) $x \rightarrow_{L_n} y = \min(1, 1 - x + y)$;
- (2) $x \vee_{L_n} y = \max(x, y)$;
- (3) $x \wedge_{L_n} y = \min(x, y)$;
- (4) $\sim x = 1 - x$ 。

称 L_n 及定义在其上的运算为 n 值 Łukasiewicz 代数系统。

Łukasiewicz 命题逻辑语言是将命题逻辑原子公式的真值映射至系统 L_n 的 n 个取值,以实现命题的多值化处理。参照文献[20]中对于逻辑公式的定义,给出 Łukasiewicz 命题逻辑的形式化表达如下。

定义 1: 设 $P = \{p_0, p_1, \dots\}$ 为可数的命题变元集合,对于 n 值命题逻辑语言 P_n , 公式 φ 归纳定义如下:

$$\varphi := p \mid \bar{a} \mid \neg \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \rightarrow \varphi$$

其中, $p \in P, a \in L_n$ 。定义真度赋值函数 $V: P_n \rightarrow L_n$ 如下:

- (1) $V(p) = c (c \in L_n)$;
- (2) $V(\bar{a}) = a$;
- (3) $V(\neg \varphi) = \sim V(\varphi)$;
- (4) $V(\varphi \vee \psi) = V(\varphi) \vee_{L_n} V(\psi)$;
- (5) $V(\varphi \wedge \psi) = V(\varphi) \wedge_{L_n} V(\psi)$;
- (6) $V(\varphi \rightarrow \psi) = V(\varphi) \rightarrow_{L_n} V(\psi)$ 。

进一步,包含逻辑符号 \leftrightarrow 的公式所诱导的真度赋值函数为 $V(\varphi \leftrightarrow \psi) = V((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$ 。

给定 P_n 的公式集 Γ 及某公式 φ , 如果对于任意的 $\psi \in \Gamma$ 且 $V(\psi) = 1$, 有 $V(\varphi) = 1$, 则称 φ 是 Γ 的 L_n -后承。针对上述 n 值命题逻辑语言 P_n , 可进一步找到一

组正确且完备的公理。

定义2: n 值命题逻辑公理系统 H_n 由如下公理组成:

- (P1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$;
 (P2) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$;
 (P3) $(\neg \varphi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$;
 (P4) $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$;
 (P5) $\overline{a * b} \leftrightarrow (\overline{a} * \overline{b})$, 其中 $*$ $\in \{ \wedge, \vee, \rightarrow \}$ 。

上述公理系统中,公理(P1)~公理(P4)是经典命题逻辑公理,(P5)则包含由 L_n 系统的数值构成的逻辑公式。给定 P_n 的公式集 Γ 及某公式 φ , 现有公式 φ 可以通过公式集 Γ 、上述公理、分离规则以及一致替换规则推导出,则将该推导关系记作 $\Gamma \vdash_n \varphi$ 。上述公理系统 H_n 的正确性和完备性由以下定理保证。

定理1:给定 P_n ($n \geq 2$) 的公式集 Γ 及某公式 φ , φ 是 Γ 的 L_n -后承,当且仅当 $\Gamma \vdash_n \varphi$ 。

文献[20]给出了该定理的证明。可以验证, $n=2$ 是二值逻辑的情况。

2 n 值命题模态逻辑

2.1 n 值关系语义

基于上一节介绍的 n 值 Łukasiewicz 代数系统及其在命题逻辑的扩展,给出 n 值命题模态逻辑的语法。

定义3:设 $Q = \{p_0, p_1, \dots\}$ 为可数的命题变元集合,对于 n 值命题模态逻辑语言 Q_n ,模态公式 φ 归纳定义如下:

$$\varphi := p \mid \perp \mid \overline{a} \mid \neg \varphi \mid \varphi \vee \psi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \rightarrow \psi \mid \Box \varphi$$

其中, $p \in Q$, $a \in L_n$ 。

公式 \neg 可由 \perp 定义得到,即 $\neg \varphi := \varphi \rightarrow \perp$;模态词 \Box 可由模态词 \Diamond 定义得到,即 $\Diamond \varphi := \neg \Box \neg \varphi$ 。

下面基于系统 L_n 给出 n 值命题模态逻辑语言 Q_n 的关系语义。不同于文献[28-29],这里针对公式在状态上进行 n 值化处理,同时保持状态间关系的确定性。

定义4:令 $F = (S, R)$ 为 Q_n 的框架,其中 $S \neq \emptyset$ 为状态集合, $R \subseteq S \times S$ 为状态间的二元关系;令 $M = (F, V)$ 为 Q_n 的模型,其中 $V: Q_n \times S \rightarrow L_n$ 是模态公式在状态上的真度赋值函数,定义如下:

- (1) $V(p, u) = c$;
 (2) $V(\overline{a}, u) = a$;
 (3) $V(\neg \varphi, u) = \sim V(\varphi, u)$;
 (4) $V(\varphi \vee \psi, u) = V(\varphi, u) \vee_{L_n} V(\psi, u)$;
 (5) $V(\varphi \wedge \psi, u) = V(\varphi, u) \wedge_{L_n} V(\psi, u)$;
 (6) $V(\varphi \rightarrow \psi, u) = V(\varphi, u) \rightarrow_{L_n} V(\psi, u)$;
 (7) $V(\Box \varphi, u) = \bigwedge_{L_n} \{ V(\varphi, v) \mid \forall v \in S \text{ 且 } (u, v) \in R \}$ 。

上述式子中, $u, v \in S$, $c, a \in L_n$ 。

根据上述定义,可以进一步导出公式 $\Diamond \varphi$ 的真度赋值函数,即:

$$V(\Diamond \varphi, u) = \bigvee_{L_n} \{ V(\varphi, v) \mid \forall v \in S \text{ 且 } (u, v) \in R \}$$

参考文献[30],下面给出 Q_n 的模态公式在模型 M 上的可满足性定义。

定义5:给定 Q_n 的模型 $M = (F, V)$,其中 $F = (S, R)$ 为 Q_n 的框架,对于模态公式 φ ,若对于任意状态 $u \in S$,均有 $V(\varphi, u) = 1$,则称 φ 在 M 上是有效的,记为 $V_M(\varphi) = 1$ 。若存在某个状态 $u \in S$,有 $V(\varphi, u) > 0$,称 φ 在模型 M 的状态 u 下是可满足的。

可以验证, φ 在模型 M 的某个状态 u 下是可满足的,当且仅当 $\neg \varphi$ 在模型 M 上不是有效的。对于上述可满足性的定义,若限制 $V(\varphi, u) = 1$,实际上 n 值命题模态逻辑就转化为了经典的命题模态逻辑。

类似于 n 值命题逻辑,定义 Q_n 下的 L_n -后承如下:给定 Q_n 的模型 M 、公式集 Γ 及某公式 φ ,如果对于任意的 $\psi \in \Gamma$ 且 $V_M(\psi) = 1$,有 $V_M(\varphi) = 1$,则称 φ 是 Γ 的 L_n -后承。

2.2 公理系统

在经典命题模态逻辑中, K 系统为最基本的模态逻辑系统^[1],其对框架上的状态关系 R 没有限制。该系统基本构成包括:经典命题逻辑公理、公理 K 、分离规则 MP 、必然化规则 N 以及一致替换规则:

$$\text{公理 } K: \Box(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \rightarrow (\Box \varphi_1 \rightarrow \Box \varphi_2)$$

$$\text{分离规则 } MP: \frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

$$\text{必然化规则 } N: \frac{\varphi}{\Box \varphi}$$

一致替换规则即将上述公理及规则中的公式一致替换为任意其它形式的公式。

以 K 系统为基础,增加公理及规则可得到其他经典的模态逻辑公理系统。具体而言,在 K 系统之上增加公理 T 可得 T 系统,同时框架上的关系 R 满足自反性;在 T 系统之上增加公理 4 可得系统 $S4$,同时框架上的关系 R 满足自反性和传递性;在 $S4$ 上增加公理 5 可得系统 $S5$,同时框架上的关系 R 满足自反性和欧性^[1]。

$$\text{公理 } T: \Box \varphi \rightarrow \varphi$$

$$\text{公理 } 4: \Box \varphi \rightarrow \Box \Box \varphi$$

$$\text{公理 } 5: \Diamond \varphi \rightarrow \Box \Diamond \varphi$$

下面利用上述公理系统给出 n 值命题模态逻辑的公理系统。在此之前,给出如下两条包含形如 \overline{a} ($a \in L_n$) 公式的公理。

$$\text{公理 } A1: \Box \overline{1}$$

$$\text{公理 } A2: \Box(\overline{a} \rightarrow \varphi) \leftrightarrow (\overline{a} \rightarrow \Box \varphi)$$

定义6: n 值命题模态逻辑系统 K_n 由 n 值命题逻辑公理(P1) ~ 公理(P5)、公理 K 、分离规则 MP、必然化规则 N 、一致替换规则、公理 A1 以及公理 A2 组成; 系统 T_n 包含 K_n , 另外包含公理 T ; 系统 $S4_n$ 包含 T_n , 另外包含公理 4; 系统 $S5_n$ 包含 $S4_n$, 另外包含公理 5。

下文利用符号 Λ_n 指代某个 n 值命题模态逻辑系统, 其中 $\Lambda \in \{K, T, S4, S5\}$ 。在 n 值关系语义下, n 值命题模态逻辑系统 Λ_n 的正确性及完备性尚不明确, 下文对此进行探讨。

3 正确性的证明

本节给出 n 值模态逻辑系统 Λ_n 的正确性证明。其证明目标是: 任给 Q_n 的模型 M 、公式集 Γ , 其中 M 服从对对应经典命题模态逻辑系统对关系 R 的限制, 那么对于任意的 φ 且 $\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi$, 有 φ 是 Γ 的 L_n -后承。其证明思路是: 依次证明系统 Λ_n 中公理的有效性和推导规则的正确性, 这样根据 L_n -后承的定义, 若对于任意的 $\psi \in \Gamma$ 且 $V_M(\psi) = 1$, 那么有 $V_M(\varphi) = 1$ 。

定理2: 针对 n 值模态逻辑系统 Λ_n , 任给 Q_n 的模型 M 、公式集 Γ , 对于任意的 φ , 若 $\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi$, 那么有 φ 是 Γ 的 L_n -后承。

证明: 按照如下步骤进行, 首先分别证明公理 K 、公理 T 、公理 4、公理 5、公理 A1 和公理 A2 的有效性, 其次分别证明推导规则 MP 及规则 N 的正确性。一致替换规则的正确性由前述推导规则及公理的正确性易证。另外经典 n 值命题逻辑公理的有效证明性可参考文献[20], 在此略过。

(1) 公理 K 的有效性。给定任意 n 值模型 M 及公式 φ , 对于任意的状态 $u \in S$, 往证结论 $V(\Box(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \rightarrow (\Box\varphi_1 \rightarrow \Box\varphi_2), u) = 1$ 。为证此结论, 首先假设 $V(\Box(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2), u) = c$ 成立, 欲使 $V(\Box(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \rightarrow (\Box\varphi_1 \rightarrow \Box\varphi_2), u) = 1$, 根据 \rightarrow_{L_n} 定义, 需证 $V(\Box\varphi_1 \rightarrow \Box\varphi_2, u) \geq c$ 。进一步假设 $V(\Box\varphi_1, u) = d$, 欲使 $V(\Box\varphi_1 \rightarrow \Box\varphi_2, u) \geq c$ 成立, 只需证 $V(\Box\varphi_2, u) \geq c + d - 1$ 。展开 $V(\Box\varphi_2, u)$ 如下:

$$V(\Box\varphi_2, u) = \bigwedge_{L_n} \{V(\varphi_2, v) \mid \forall v \in S \text{ 且 } (u, v) \in R\}$$

设存在状态 $w \in S$ 且 $(u, w) \in R$, 使得 $w = \operatorname{argmin}_{v \in S \text{ 且 } (u, v) \in R} V(\varphi_2, v)$ 成立, 于是有 $V(\Box\varphi_2, u) = V(\varphi_2, w)$ 。由于 $V(\Box(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2), u) = c$, 且 $(u, w) \in R$, 有 $V(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2, w) \geq V(\Box(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2), u) = c$ 。又由假设 $V(\Box\varphi_1, u) = d$, 有 $V(\varphi_1, w) \geq V(\Box\varphi_1, u) = d$ 。 $V(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2, w)$ 展开如下:

$$V(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2, w) = V(\varphi_1, w) \rightarrow_{L_n} V(\varphi_2, w) = \min(1, 1 - V(\varphi_1, w) + V(\varphi_2, w)) \geq c$$

要使上式成立, 即使 $1 - V(\varphi_1, w) + V(\varphi_2, w) \geq c$, 由 $V(\Box\varphi_2, u) = V(\varphi_2, w)$ 有 $1 - V(\varphi_1, w) + V(\Box\varphi_2,$

$u) \geq c$, 进一步有 $V(\Box\varphi_2, u) \geq c + V(\varphi_1, w) - 1$, 由 $V(\varphi_1, w) \geq d$ 有 $V(\Box\varphi_2, u) \geq c + d - 1$ 。因此得证。

(2) 公理 T 的有效性。给定任意 n 值模型 M 及公式 φ , 对于任意 $u \in S$, 往证 $V(\Box\varphi \rightarrow \varphi, u) = 1$ 。进一步假设 $V(\Box\varphi, u) = c$, 欲使 $V(\Box\varphi \rightarrow \varphi, u) = 1$, 需证 $V(\varphi, u) \geq c$ 。展开 $V(\Box\varphi, u)$ 如下:

$$V(\Box\varphi, u) = \bigwedge_{L_n} \{V(\varphi, v) \mid \forall v \in S \text{ 且 } (u, v) \in R\}$$

由于系统 T_n 需关系 R 满足自反性, 则 $(u, u) \in R$, 进一步有 $V(\varphi, u) \geq V(\Box\varphi, u) = c$ 。因此得证。

(3) 公理 4 的有效性。给定任意 n 值模型 M 及公式 φ , 对于任意 $u \in S$, 往证 $V(\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi, u) = 1$ 。进一步假设 $V(\Box\varphi, u) = c$, 欲使 $V(\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi, u) = 1$, 需证 $V(\Box\Box\varphi, u) \geq c$ 。任给 $w \in S$, 使得 $(u, w) \in R^2$, 欲使 $V(\Box\Box\varphi, u) \geq c$, 根据 $V(\Box\Box\varphi, u)$ 的展开式及 w 的任意性, 只需证 $V(\varphi, w) \geq c$ 。

展开 $V(\Box\varphi, u)$ 如下:

$$V(\Box\varphi, u) = \bigwedge_{L_n} \{V(\varphi, v) \mid \forall v \in S \text{ 且 } (u, v) \in R\}$$

由 $(u, w) \in R^2$ 以及系统 $S4_n$ 中关系 R 的传递性有 $(u, w) \in R$, 因此根据上式有结论 $V(\varphi, w) \geq V(\Box\varphi, u) = c$ 成立。因此得证。

(4) 公理 5 的有效性。给定任意 n 值模型 M 及公式 φ , 对于任意 $u \in S$, 往证 $V(\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi, u) = 1$ 。进一步假设 $V(\Diamond\varphi, u) = c$, 欲使 $V(\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi, u) = 1$, 需证 $V(\Box\Diamond\varphi, u) \geq c$ 。任给 $v \in S$, 使得 $(u, v) \in R$, 欲使 $V(\Box\Diamond\varphi, u) \geq c$, 只需证 $V(\Diamond\varphi, v) \geq c$ 。

展开 $V(\Diamond\varphi, u)$ 如下:

$$V(\Diamond\varphi, u) = \bigvee_{L_n} \{V(\varphi, w) \mid \forall w \in S \text{ 且 } (u, w) \in R\} = c$$

因此, 存在 $w \in S$ 且 $(u, w) \in R$, 使得 $V(\varphi, w) = c$ 。由于系统 $S5_n$ 中关系 R 具有欧性, 有 $(v, w) \in R$, 进一步根据 $V(\Diamond\varphi, v)$ 的展开式有 $V(\Diamond\varphi, v) \geq V(\varphi, w) = c$ 。因此得证。

(5) 公理 A1 的有效性。给定任意 n 值模型 M 及公式 φ , 对任意 $u \in S$, 证 $V(\Box\bar{1}, u) = 1$ 。展开 $V(\Box\bar{1}, u)$ 有 $V(\Box\bar{1}, u) = \bigwedge_{L_n} \{V(\bar{1}, v) \mid \forall v \in S \text{ 且 } (u, v) \in R\}$ 。根据定义 4 有 $V(\bar{1}, v) = 1$, 进一步有 $V(\Box\bar{1}, u) = 1$ 。因此得证。

(6) 公理 A2 的有效性。先证公式 $\Box(\bar{a} \rightarrow \varphi) \rightarrow (\bar{a} \rightarrow \Box\varphi)$ 的有效性。给定任意 n 值模型 M 及公式 φ , 对于任意 $u \in S$, 往证 $V(\Box(\bar{a} \rightarrow \varphi) \rightarrow (\bar{a} \rightarrow \Box\varphi), u) = 1$ 结论成立。假设有 $V(\Box(\bar{a} \rightarrow \varphi), u) = c$ 结论成立, 若要使 $V(\Box(\bar{a} \rightarrow \varphi) \rightarrow (\bar{a} \rightarrow \Box\varphi), u) = 1$ 结论成立, 需证 $V(\bar{a} \rightarrow \Box\varphi, u) \geq c$ 。展开 $V(\bar{a} \rightarrow \Box\varphi, u)$ 有, 欲证 $V(\bar{a} \rightarrow \Box\varphi, u) \geq c$, 即证 $V(\Box\varphi, u) \geq a + c - 1$ 。进一步展开 $V(\Box\varphi, u)$ 有, 欲证 $V(\Box\varphi, u) \geq a + c - 1$, 即证 $\forall v \in$

S 且 $(u, v) \in R$, 有 $V(\varphi, v) \geq a + c - 1$ 成立。展开 $V(\Box(\bar{a} \rightarrow \varphi), u)$ 如下:

$$\begin{aligned} V(\Box(\bar{a} \rightarrow \varphi), u) &= \\ \bigwedge_{L_n} \{ &V(\bar{a} \rightarrow \varphi, v) \mid \forall v \in S \text{ 且 } (u, v) \in R \} = \\ \bigwedge_{L_n} \{ &\min(1, 1 - a + V(\varphi, v)) \mid \forall v \in S \\ &\text{且 } (u, v) \in R \} = c \end{aligned}$$

欲使上式结论成立, 有 $\forall v \in S$ 且 $(u, v) \in R$, 需有 $1 - a + V(\varphi, v) \geq c$, 即 $V(\varphi, v) \geq a + c - 1$ 。因此得证。

再证公式 $(\bar{a} \rightarrow \Box\varphi) \rightarrow \Box(\bar{a} \rightarrow \varphi)$ 的有效性。给定任意 n 值模型 M 及公式 φ , 对于任意 $u \in S$, 往证 $V((\bar{a} \rightarrow \Box\varphi) \rightarrow \Box(\bar{a} \rightarrow \varphi), u) = 1$ 结论成立。现假设 $V(\bar{a} \rightarrow \Box\varphi, u) = c$ 结论成立, 若要使得 $V((\bar{a} \rightarrow \Box\varphi) \rightarrow \Box(\bar{a} \rightarrow \varphi), u) = 1$ 结论成立, 需证 $V(\Box(\bar{a} \rightarrow \varphi), u) \geq c$ 。展开 $V(\Box(\bar{a} \rightarrow \varphi), u)$ 有, 欲证 $V(\Box(\bar{a} \rightarrow \varphi), u) \geq c$, 即证 $\forall v \in S$ 且 $(u, v) \in R$, $V(\bar{a} \rightarrow \varphi, v) \geq c$; 进一步展开 $V(\bar{a} \rightarrow \varphi, v)$ 有, 欲证 $V(\bar{a} \rightarrow \varphi, v) \geq c$, 即证 $V(\varphi, v) \geq a + c - 1$ 。展开 $V(\bar{a} \rightarrow \varphi, v)$ 如下:

$$\begin{aligned} V(\bar{a} \rightarrow \varphi, v) &= V(\bar{a}, v) \rightarrow_{L_n} V(\varphi, v) = \\ &\min(1, 1 - a + V(\varphi, v)) = c \end{aligned}$$

欲使上式成立, 需 $1 - a + V(\varphi, v) = c$, 即 $V(\varphi, v) = a + c - 1$ 。展开 $V(\varphi, v)$ 有, 欲使 $V(\varphi, v) = a + c - 1$ 成立, 有 $\forall v \in S$ 且 $(u, v) \in R$, $V(\varphi, v) \geq a + c - 1$ 成立。因此得证。

下面证明规则的正确性。

(7) 分离规则 MP 的正确性。给定任意 n 值模型 M 及公式 φ , 根据归纳假设有 $V_M(\varphi) = 1$, $V_M(\varphi \rightarrow \psi) = 1$, 往证 $V_M(\psi) = 1$ 。由 $V_M(\varphi) = 1$ 和 $V_M(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ 有, 对于任意状态 $u \in S$, $V(\varphi, u) = V(\varphi \rightarrow \psi, u) = 1$ 。 $V(\varphi \rightarrow \psi, u)$ 可展开如下:

$$\begin{aligned} V(\varphi \rightarrow \psi, u) &= V(\varphi, u) \rightarrow_{L_n} V(\psi, u) = \\ &\min(1, 1 - V(\varphi, u) + V(\psi, u)) = \\ &\min(1, V(\psi, u)) = 1 \end{aligned}$$

由于 $V(\psi, u) \leq 1$, 要使上式成立, 则有 $V(\psi, u) = 1$, 由于 u 的任意性, 即有 $V_M(\psi) = 1$ 。因此得证。

(8) 推导规则 N 的正确性。给定任意 n 值模型 M 及公式 φ , 根据归纳假设有 $V_M(\varphi) = 1$, 往证 $V_M(\Box\varphi) = 1$ 。由 $V_M(\varphi) = 1$ 有, 对于任意 $u \in S$, $V(\varphi, u) = 1$ 。展开 $V(\Box\varphi, u)$ 如下:

$$V(\Box\varphi, u) = \bigwedge_{L_n} \{ V(\varphi, v) \mid \forall v \in S \text{ 且 } (u, v) \in R \}$$

设存在状态 $w \in S$ 且 $(u, w) \in R$, 并且使得 $w = \operatorname{argmin}_{\forall v \in S \text{ 且 } (u, v) \in R} V(\varphi, v)$, 由上式有 $V(\Box\varphi, u) = V(\varphi, w)$ 。由于 u 具有任意性, 有 $V(\varphi, w) = 1$, 进一步有 $V(\Box\varphi, u)$, 因而 $V_M(\Box\varphi) = 1$ 得证。

证毕。

4 完备性的证明

本节给出 n 值关系语义下命题模态逻辑完备性的证明。其证明目标是: 任给 Q_n 的模型 M 、公式集 Γ , 对于任意的 φ , 且 φ 是 Γ 的 L_n -后承, 有 $\Gamma \vdash_{L_n} \varphi$ 。具体按如下思路进行: 任给公式集 $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Q_n$, 欲证: 如果 φ 是 Γ 的 L_n -后承, 那么 $\Gamma \vdash_{L_n} \varphi$; 则证明其逆否命题: 如果 $\Gamma \not\vdash_{L_n} \varphi$, 那么 φ 不是 Γ 的 L_n -后承。为证明 φ 不是 Γ 的 L_n -后承, 寻找模型 M , 使得对于任意的 $\psi \in \Gamma$, $V_M(\psi) = 1$, 有 $V_M(\varphi) \neq 1$, 也即 φ 不是 Γ 的 L_n -后承, 结合假设 $\Gamma \not\vdash_{L_n} \varphi$, 完备性即可得证。上述所寻找的模型通常称为典范模型 (canonical model), 下面给出该模型的构造。在此之前先定义极大一致集。当存在某个公式 $\varphi \in Q_n$, 使得 $\Omega \not\vdash_{L_n} \varphi$, 称公式集 Ω 是一致的。极大一致集基于公式集的一致性进行定义, 如下:

定义 7 (极大一致集): 任给 n 值命题模态公式集 Ω , Ω 是一致的, 且不存在任何 $\Omega' \supset \Omega$, 使得 Ω' 是一致的, 则称 Ω 是极大一致集。

下文用 \mathcal{M}_{L_n} 代表公理系统 L_n 上所有极大一致集构成的集合。进一步, 根据极大一致集的定义, 有如下引理。

引理 1: 任给逻辑系统 L_n 的极大一致集 Ω , 对任意 n 值命题模态公式 φ, ψ 有:

- (1) $\Omega \vdash_{L_n} \varphi$ 当且仅当 $\varphi \in \Omega$;
- (2) $\neg \varphi \in \Omega$ 当且仅当 $\varphi \notin \Omega$;
- (3) $\varphi \rightarrow \psi \in \Omega$ 当且仅当 $\varphi \notin \Omega$ 或 $\psi \in \Omega$;
- (4) $\varphi \wedge \psi \in \Omega$ 当且仅当 $\varphi \in \Omega$ 且 $\psi \in \Omega$;
- (5) $\varphi \vee \psi \in \Omega$ 当且仅当 $\varphi \in \Omega$ 或 $\psi \in \Omega$ 。

证明 分别针对上述 5 条结论证明:

(1) (\Rightarrow) 若 $\Omega \vdash_{L_n} \varphi$, 假设 $\varphi \notin \Omega$, 则存在 $\Omega \cup \{\varphi\} \supset \Omega$ 亦是一致的, 因此得证。 (\Leftarrow) 根据 \vdash_{L_n} 的自反性可得。

(2) (\Rightarrow) 若 $\neg \varphi \in \Omega$, 根据 (1) 有 $\Omega \vdash_{L_n} \neg \varphi$ 。假设 $\varphi \in \Omega$, 根据 (1) 有 $\Omega \vdash_{L_n} \varphi$ 。因此, Ω 可以推出任何公式, 这与 Ω 是一致的矛盾, 因此 $\varphi \notin \Omega$ 。 (\Leftarrow) 若 $\varphi \notin \Omega$, 根据 (1) 有 $\Omega \vdash_{L_n} \varphi$ 。假设 $\neg \varphi \in \Omega$, 根据 (1) 有 $\Omega \not\vdash_{L_n} \neg \varphi$ 。由于 Ω 是极大一致集, 有 $\Omega \vdash_{L_n} \varphi \vee \neg \varphi$, 即 $\Omega \vdash_{L_n} \varphi$ 或 $\Omega \vdash_{L_n} \neg \varphi$, 与假设矛盾。因此 $\neg \varphi \in \Omega$ 。

(3) (\Rightarrow) 若 $\varphi \rightarrow \psi \in \Omega$, 根据 (1) 有 $\Omega \vdash_{L_n} \varphi \rightarrow \psi$, 根据经典命题逻辑的演绎定理有 $\Omega, \varphi \vdash_{L_n} \psi$ 。假设 $\varphi \in \Omega$, 即有 $\Omega \vdash_{L_n} \varphi$, 进一步根据 (1) 有 $\psi \in \Omega$ 。由此有 $\varphi \notin \Omega$ 或 $\psi \in \Omega$ 。 (\Leftarrow) 若 $\varphi \notin \Omega$, 根据 (1) 有 $\Omega \not\vdash_{L_n} \varphi$; 若 $\psi \in \Omega$, 根据 (1) 有 $\Omega \vdash_{L_n} \psi$ 。根据经典逻辑演绎定理有 $\Omega \vdash_{L_n} \varphi \rightarrow \psi$, 进一步根据 (1) 有 $\varphi \rightarrow \psi \in \Omega$ 。

(4) 根据算子 \wedge 与 \rightarrow, \neg 的等价性, 若 $\varphi \wedge \psi \in \Omega$, 当且仅当 $\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \in \Omega$, 当且仅当(根据(2)) $(\varphi \rightarrow \neg\psi) \notin \Omega$, 当且仅当(根据(3)) $\varphi \in \Omega$ 且 $\neg\psi \notin \Omega$, 当且仅当(根据(2)) $\varphi \in \Omega$ 且 $\psi \in \Omega$ 。

(5) 根据算子 \vee 与 \rightarrow, \neg 的等价性, 若 $\varphi \vee \psi \in \Omega$, 当且仅当 $\neg\varphi \rightarrow \psi \in \Omega$, 当且仅当(根据(3)) $\neg\varphi \notin \Omega$ 或 $\psi \in \Omega$, 当且仅当(根据(2)) $\varphi \in \Omega$ 或 $\psi \in \Omega$ 。

证毕。

针对公理系统 Λ_n 的典范模型 M^Λ 基于 Λ_n 上极大一致集的集合 \mathcal{M}_{Λ_n} 进行构建。具体定义如下:

定义8(典范模型): 对于公理系统 Λ_n , 构建模型 $M^\Lambda = (S^\Lambda, R^\Lambda, V^\Lambda)$, 其中:

(1) $S^\Lambda = \mathcal{M}_{\Lambda_n}$;

(2) 对于任意的 $u, w \in S^\Lambda$, $(u, w) \in R^\Lambda$ 当且仅当, 对任意的公式 $\varphi \in Q_n$, 若 $\square\varphi \in u$ 则 $\varphi \in w$; 同时 R^Λ 满足对应系统 Λ 对关系的要求;

(3) 对于所有的命题变元 p , $V^\Lambda(p, u) = 1$ 当且仅当 $p \in u$;

(4) 对于任意公式 φ , $V^\Lambda(\varphi, u)$ 满足定义4。称模型 M^Λ 为 Λ_n 的典范模型。

显然, 根据定义4, 上述模型 M^Λ 是一个 n 值命题模态逻辑模型。进一步, 由上述定义(2)易得如下推论。

推论1: 模型 $M^\Lambda = (S^\Lambda, R^\Lambda, V^\Lambda)$ 是系统 Λ_n 的典范模型, 对于任意的 $u, w \in S^\Lambda$, 若 $(u, w) \in R^\Lambda$, 那么对任意的公式 $\varphi \in Q_n$, 当 $\varphi \in w$ 时, $\square\varphi \in u$ 成立。

在进入完备性证明前, 还需证明如下真值引理。

引理2(真值引理): 令 $M^\Lambda = (S^\Lambda, R^\Lambda, V^\Lambda)$ 为逻辑系统 Λ_n 的典范模型, 对任意 $u \in S^\Lambda$ 及任意 n 值模态逻辑公式 φ , 有 $V^\Lambda(\varphi, u) = 1$ 当且仅当 $\varphi \in u$ 。

证明: 施归纳于 φ 的语法构造。

基础步: 当 φ 为命题变元时, 由定义8(3)易证。

归纳步: 施归纳于定义3中的逻辑算子 ($\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \square$) 如下:

(1) $\varphi: = \neg\psi$, 此时有 $V^\Lambda(\varphi, u) = 1$ 当且仅当 $V^\Lambda(\psi, u) = \sim V^\Lambda(\varphi, u) = 0$ 。根据归纳假设, $V^\Lambda(\psi, u) \neq 1$ 当且仅当 $\psi \notin u$ 。根据引理1(2), $\psi \notin u$ 当且仅当 $\neg\psi \in u$, 即 $\varphi \in u$ 。

(2) $\varphi: = \psi \vee \chi$, 此时有 $V^\Lambda(\varphi, u) = 1$ 当且仅当 $V^\Lambda(\psi \vee \chi, u) = 1$, 即 $V^\Lambda(\psi, u) = 1$ 或 $V^\Lambda(\chi, u) = 1$ 。根据归纳假设, $V^\Lambda(\psi, u) = 1$ 或 $V^\Lambda(\chi, u) = 1$, 当且仅当 $\psi \in u$ 或 $\chi \in u$, 当且仅当(根据引理1(5)) $\psi \vee \chi \in u$, 即 $\varphi \in u$ 。

(3) $\varphi: = \psi \wedge \chi$, 此时有 $V^\Lambda(\varphi, u) = 1$ 当且仅当 $V^\Lambda(\psi \wedge \chi, u) = 1$, 即 $V^\Lambda(\psi, u) = 1$ 且 $V^\Lambda(\chi, u) = 1$ 。根

据归纳假设, $V^\Lambda(\psi, u) = 1$ 且 $V^\Lambda(\chi, u) = 1$, 当且仅当 $\psi \in u$ 且 $\chi \in u$, 当且仅当(根据引理1(4)) $\psi \wedge \chi \in u$, 即 $\varphi \in u$ 。

(4) $\varphi: = \psi \rightarrow \chi$, 此时有 $V^\Lambda(\varphi, u) = 1$ 当且仅当 $V^\Lambda(\psi \rightarrow \chi, u) = 1$ 。展开 $V^\Lambda(\psi \rightarrow \chi, u)$ 如下:

$$V^\Lambda(\psi \rightarrow \chi, u) = V^\Lambda(\psi, u) \rightarrow_{L_n} V^\Lambda(\psi, \chi) = \min(1, 1 - V^\Lambda(\psi, u) + V^\Lambda(\chi, u)) = 1$$

欲使上式成立, 需 $V^\Lambda(\chi, u) \geq V^\Lambda(\psi, u)$ 。(i) 假设 $V^\Lambda(\psi, u) = 1$, 有 $V^\Lambda(\chi, u) = 1$, 根据归纳假设 $\chi \in u$; (ii) 假设 $V^\Lambda(\psi, u) < 1$, 那么 $V^\Lambda(\chi, u)$ 只需满足 $V^\Lambda(\chi, u) \geq V^\Lambda(\psi, u)$ 即可。由于 $V^\Lambda(\psi, u) < 1$, 即 $V^\Lambda(\psi, u) \neq 1$, 根据归纳假设, $\psi \notin u$ 。因此, $V^\Lambda(\psi \rightarrow \chi, u) = 1$, 当且仅当(i)或(ii)成立, 当且仅当 $\psi \notin u$ 或 $\chi \in u$, 当且仅当(根据引理1(3)) $\psi \rightarrow \chi \in u$, 即 $\varphi \in u$ 。

(5) $\varphi: = \square\psi$, (\Rightarrow) 若 $V^\Lambda(\varphi, u) = 1$, 即 $V^\Lambda(\square\psi, u) = 1$ 。展开 $V^\Lambda(\square\psi, u)$ 如下:

$$V^\Lambda(\square\psi, u) = \bigwedge_{L_n} \{V^\Lambda(\psi, v) \mid \forall v \in S^\Lambda \text{ 且 } (u, v) \in R^\Lambda\}$$

由于 $V^\Lambda(\square\psi, u) = 1$, 因此 $\forall v \in S^\Lambda$ 且 $(u, v) \in R^\Lambda$, 有 $V^\Lambda(\psi, v) = 1$, 根据归纳假设 $\psi \in v$ 。根据推论5.1, 有 $\square\psi \in u$, 即 $\varphi \in u$ 。

(\Leftarrow) 若 $\varphi \in u$, 即 $\square\psi \in u$, 任给 $v \in S^\Lambda$ 使得 $(u, v) \in R^\Lambda$, 根据定义8(2)有 $\psi \in v$, 根据归纳假设, $V^\Lambda(\psi, v) = 1$ 。展开 $V^\Lambda(\square\psi, u)$ 如下:

$$V^\Lambda(\square\psi, u) = \bigwedge_{L_n} \{V^\Lambda(\psi, v) \mid \forall v \in S^\Lambda \text{ 且 } (u, v) \in R^\Lambda\}$$

由 $V^\Lambda(\psi, v) = 1$ 及 v 任意性, 有 $V^\Lambda(\square\psi, u) = 1$ 。

证毕。

下面可进一步完成完备性的证明。

定理3: 任给公式集 Γ , 那么对于任意的 φ , φ 是 Γ 的 L_n -后承, 有 $\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi$ 。

证明 证明其逆否命题: 如果 $\Gamma \not\vdash_{\Lambda} \varphi$, 那么 φ 不是 Γ 的 L_n -后承。欲证明 φ 不是 Γ 的 L_n -后承, 则需寻找模型 M' , 使得对于任意的 $\psi \in \Gamma$, $V_{M'}(\psi) = 1$, 有 $V_{M'}(\varphi) \neq 1$ 。

所寻找的模型为 Λ_n 的典范模型 $M^\Lambda = (S^\Lambda, R^\Lambda, V^\Lambda)$ 。令 Γ' 为 Λ_n 的极大一致集, 且 $\Gamma' \supset \Gamma$, 有 $\Gamma' \in S^\Lambda$ 。

(1) 对于任意的 $\psi \in \Gamma$, 有 $\psi \in \Gamma'$, 根据引理2进一步有 $V^\Lambda(\psi, \Gamma') = 1$ 。

(2) 由假设 $\Gamma \not\vdash_{\Lambda} \varphi$ 及 Γ' 的一致性, 有 $\Gamma' \not\vdash_{\Lambda} \varphi$ 。根据引理1(1), 有 $\varphi \notin \Gamma'$ 。根据引理2, 有 $V^\Lambda(\varphi, \Gamma') \neq 1$ 。

综合(1)和(2)可证上述逆否命题。

证毕。

5 结束语

从实用角度出发,基于 Łukasiewicz 代数系统建立一种新的 n 值关系语义下的命题模态逻辑。具体而言,将关系语义中的状态进行 n 值化处理,同时保持状态间关系的确定性,基于此给出了 n 值关系语义下命题模态逻辑公式的定义,证明了在给定语义模型下的可满足性、有效性。此外,证明了经典模态逻辑系统 $K, T, S4$ 和 $S5$ 在 n 值关系语义下的正确性和完备性。下一步工作将从两方面开展:首先,完备性证明中使用的典范模型具有无限性,不利于考察计算复杂度问题。后续研究将探索是否可以建立有限的典范模型,从而给出可满足性的可判定算法及其计算复杂度;其次,利用该文建立 n 值命题模态逻辑所使用的方法,考察如何进一步扩展到其它模态逻辑系统中,如一阶模态逻辑、时序逻辑中。

参考文献:

- [1] BLACKBURN P, DE RIJKE M, VENEMA T. Modal logic [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [2] BOZZELLI L, MOLINARI A, MONTANARI A, et al. Model checking interval temporal logics with regular expressions [J]. Journal of Information and Computation, 2019, 45(2): 23–57.
- [3] 戴姣丽, 廖小平, 莫以为. 模态逻辑下的 WMS 安全机制研究[J]. 机械设计与制造, 2011(3): 104–105.
- [4] RYBAKOV M, SHKATOV D. Complexity of finite-variable fragments of products with K [J]. Journal of Logic and Computation, 2021, 31(2): 426–443.
- [5] RYBAKOV M, SHKATOV D. On relationship between complexity function and complexity of validity in propositional modal logic [C]//Proceedings of the workshop on logical perspectives. Moscow: Witwatersrand Press, 2021: 5–17.
- [6] CHOMICKI J, SAAKE G. Logics for databases and information systems [M]. Berlin: Springer Science and Business Media, 2012.
- [7] LIANG K. Reasoning over different types of knowledge graphs: static, temporal and multi-modal [J/OL]. [2023-02-27]. <https://arxiv.org/abs/2212.05767>.
- [8] 万小龙. 作为量子信息基础的模态逻辑四个等价性[J]. 自然辩证法研究, 2022(5): 17–23.
- [9] BARCELO P, KOSTYLEV E, MONET M, et al. The logical expressiveness of graph neural networks [C]//Proceedings of the 8th international conference on learning representations. Ethiopia: OpenReview, 2020: 123–145.
- [10] GROHE M. The logic of graph neural networks [C]//Proceedings of the 36th annual ACM/IEEE symposium on logic in computer science. Rome: IEEE, 2021: 1–17.
- [11] 周北海. 模态逻辑导论 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1997.
- [12] 张 呈, 张晓君. 命题动态逻辑的基本思想及其扩展系统 [J]. 贵州工程应用技术学院学报, 2023, 41(1): 59–65.
- [13] 赵之光. 破坏模态逻辑的算法对应理论 [J]. 逻辑学研究, 2022, 15(6): 66–92.
- [14] MRA B, DS C. Complexity of finite-variable fragments of propositional temporal and modal logics of computation [J]. Journal of Theoretical Computer Science, 2022, 925: 45–60.
- [15] CINTULA P, NOGUERA C, SMITH N J J. A logical framework for graded predicates [C]//Proceedings of the 6th international workshop on logic, rationality and interaction. Sapporo: Springer, 2017: 3–16.
- [16] GONG Z. Graded many-valued modal logic and its graded rough truth [J]. Journal of Axioms, 2022, 11(7): 341–356.
- [17] CALEGARI R, CIATTO G, MASCARDI V, et al. Logic-based technologies for multi-agent systems: a systematic literature review [J]. Journal of Autonomous Agents and Multi-Agent Systems, 2021, 35(1): 1–67.
- [18] GARUD K, JAYARAJ S, LEE M. A review on modeling of solar photovoltaic systems using artificial neural networks, fuzzy logic, genetic algorithm and hybrid models [J]. Journal of International Journal of Energy Research, 2021, 45(1): 6–35.
- [19] ROSSER J B, TURQUETTE A R. Many-valued logics [M]. Amsterdam: North-Holland, 1952.
- [20] HÁJEK P. Metamathematics of fuzzy logic [M]. Berlin: Springer Science and Business Media, 2013.
- [21] 王国俊, 宋健社. 命题逻辑中的程度化方法 [J]. 电子学报, 2006, 34(3): 252–257.
- [22] 王国俊, 傅 丽, 宋健社. 二值命题逻辑中命题的真度理论 [J]. 中国科学, 2001, 31(11): 998–1008.
- [23] WANG G J, ZHOU H J. Quantitative logic [J]. Journal of Information Sciences, 2009, 179(3): 226–247.
- [24] 王国俊, 段巧林. 模态逻辑中的 (n) 真度理论和和谐定理 [J]. 中国科学, 2009, 39(3): 234–245.
- [25] 李璧镜. 模态逻辑公式的概率真度理论 [J]. 宝鸡文理学院学报: 自然科学版, 2022, 42(3): 1–5.
- [26] 王国俊, 李璧镜. Łukasiewicz n -值命题逻辑中公式的真度理论和极限定理 [J]. 中国科学, 2005, 35(6): 561–569.
- [27] DI N A, LETTIERI A. On normal forms in Łukasiewicz logic [J]. Journal of Archive for Mathematical Logic, 2004, 43: 795–823.
- [28] SEDLAR I. Finitely-valued propositional dynamic logics [J]. Journal of Advances in Modal Logic, 2020, 13: 561–579.
- [29] SEDLAR I. Decidability and complexity of some finitely-valued dynamic logics [C]//Proceedings of the 18th international conference on principles of knowledge representation and reasoning. Rome: IJCAI Organization, 2021: 570–580.
- [30] SALHI Y. On satisfiability problem in modal logic $S5$ [C]//Proceedings of the 35th ACM/SIGAPP symposium on applied computing. Brno Czech Republic: ACM, 2020: 948–955.